

# LINJÄR ALGEBRA

Del III – Abstrakta vektorrum

JOHAN WILD

2020-03-16

©Johan Wild 2014

[johan.wild@europaskolan.se](mailto:johan.wild@europaskolan.se)

Får gärna användas i undervisning, kontakta i så fall författaren.

2020-03-16

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Notation</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Vektorrum</b>	<b>5</b>
3.1	Inledning . . . . .	5
3.2	Axiom . . . . .	5
3.3	Exempel . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Metrik, norm och skalärprodukt</b>	<b>6</b>
4.1	Metrik . . . . .	6
4.2	Norm . . . . .	7
4.3	Skalärprodukt . . . . .	8
4.4	Ordning i strukturen . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Funktionsrum</b>	<b>10</b>
5.1	Vektorstruktur . . . . .	10
5.2	Norm . . . . .	10
5.3	Skalärprodukt och metrik . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Basvektorer i funktionsrum</b>	<b>12</b>
6.1	Diracs deltafunktion – En basvektor i varje punkt . . . . .	12
6.2	Trigonometriska basvektorer – Fourierserier . . . . .	13
6.2.1	Fyrkantvåg . . . . .	14
6.2.2	Angående normeringen av basfunktionerna . . . . .	16
6.2.3	Trigonometriska basfunktioner på komplex form . . . . .	17
6.3	Andra basfunktioner . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Operatorer, egenvärden och svängningar</b>	<b>18</b>
7.1	Operatorer och egenvärden . . . . .	18
7.2	Svängningar . . . . .	18
7.3	Vågor . . . . .	19
7.4	Två dimensioner . . . . .	20
7.4.1	Kartesiska koordinater . . . . .	20
7.4.2	Polära koordinater . . . . .	21
7.5	Tre dimensioner . . . . .	21
7.5.1	Kartesiska koordinater . . . . .	21
7.5.2	Cylindriska koordinater . . . . .	22
7.5.3	Sfäriska koordinater . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Icke-Periodiska funktioner</b>	<b>22</b>
<b>9</b>	<b>Sammanfattning och jämförelse</b>	<b>24</b>
<b>10</b>	<b>Kvantmekanik</b>	<b>24</b>
10.1	Energivåer . . . . .	24
10.2	Motivering av Schrödingerekvationen . . . . .	25
10.3	Partikeln i lådan . . . . .	26
10.4	Förväntasvärden . . . . .	28
10.5	Förväntasvärden i kvantmekaniken . . . . .	28
10.5.1	Förväntansvärden från egentillstånd . . . . .	29
10.6	Heisenbergs olikhet . . . . .	29
<b>11</b>	<b>Slutord</b>	<b>31</b>

# 1 Inledning

Denna text syftar till att introducera abstrakta vektorrum, speciellt funktionsrum. Den är del III i en serie om Linjär algebra där de två första delarna har handlat om vektorer och den andra matriser.

Texten är skriven för kursen Linjär Cirkel vid Europaskolan och är tänkt att dessutom stödja kursen Fysik Specialisering där Fourierserier tillämpas inom vågrörelseläran och där även kvantmekanik tas upp.

Fokus i denna text ligger på att ge en förklaring till de begrepp som tas upp på en konceptuell nivå. Meningen är att man skall se likheter mellan olika begrepp och se en progression i olika strukturer”. Det är inte textens mening att bevisa allt som påstås. Här målas med stora penseln!

Denna text är för närvarande den minst utvecklade av de tre delarna i serien om linjär algebra. Vänligen ha överseende med det vid läsningen.

## 2 Notation

Här följer en sammanställning av notationen som används i denna text.

$\mathcal{V}$	Vektorrum anges med detta typsnitt.
$\mathbf{v}$	Vektorer anges i allmänhet med fet stil, men ...
$f(x)$	... vektorer i funktionsrum anges som funktioner brukar göra.
$\hat{b}(x)$	Basfunktioner anges med en hatt.
$\tilde{f}(k)$	Komponenterna för en funktion i en överuppräknelig bas anges med tilde.
$a$	Skalärer anges med icke-fet stil.
$a^*$	Om skalärfältet är de komplexa talen anger detta komplexkonjugatet av $a$ .
$v_x$	$\hat{x}$ -komponenten av $\mathbf{v}$ .
$\ \mathbf{v}\ $	Norm (storlek)
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	Skalärprodukt.

### Kommentar

I fysiken och tekniska tillämpningar är det mycket vanligt att använda en hatt för att ange att en vektor används som bas.

Det är också vanligt att ange Fouriertransformen av en funktion  $f(x)$  med en hatt, som i  $\hat{f}(k)$ . Denna hatt-notation har inget att göra med basvektorer.

I denna text anges alltså Fouriertransformen (och andra ”komponent-funktioner”) med ett tilde istället,  $\tilde{f}(k)$ .

## 3 Vektorrum

### 3.1 Inledning

I första delen i denna serie, den om vektorer, studerade vi vektorrummen  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbb{R}^3$  utan att göra så stor affär av vad som menas med vektorer. Här skall vi göra några förtydliganden av vad som menas med vektorer. I korthet är vektorer element man kan addera med varandra och multiplicera med tal.

### 3.2 Axiom

Ett **vektorrum** (eng vector space) består av en kropp  $K$  och en mängd  $\mathcal{V}$  där det finns en operation (addition,  $+$ ) definierad på elementen i  $\mathcal{V}$  och en operation (multiplikation,  $\cdot$ ) definierad på element i  $K$  och elementen i  $\mathcal{V}$ .

Element i  $\mathcal{V}$  benämns **vektorer** och betecknas i denna text med fet stil. Element i  $K$  benämns **skalärer**.

Vi säger att vektorrummet  $\mathcal{V}$  är **över**  $K$ .

**Axiom** Följande punkter skall gälla för alla  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$  och för alla  $k, l \in K$ .

1. Addition är kommutativ:  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. Addition är associativ:  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. Existens av nollvektorn:

Det finns ett element  $\mathbf{0}$  så att  $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

4. Existens av invers:

Till varje  $\mathbf{v}$  finns ett element  $\mathbf{u}$  så att  $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

5. Multiplikation med skalär är distributiv:  $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
6. Multiplikation med skalär är associativ:  $k(l\mathbf{v}) = (kl)\mathbf{v}$
7. Multiplikation med multiplikativt enhetselement i  $K$ :  $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Det går inte att utläsa ur axiomen ovan att vi kräver att  $K$  skall vara just en kropp. Existensen av en multiplikativ invers till elementen i  $K$  används inte, men i praktiken kommer vi kräva att de finns så att vi kan räkna utan att behöva bekymra oss om det.

### 3.3 Exempel

Självklart gäller att talmängderna  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  och  $\mathbb{C}$  är vektorrum över sig själva. De hela talen  $\mathbb{Z}$  inte ett vektorrum över sig själv eftersom  $\mathbb{Z}$  inte är en kropp.

Vi har tidigare studerat  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbb{R}^3$  som vektorrum över  $\mathbb{R}$ . På samma sätt är  $\mathbb{R}^n$  ett vektorrum över  $\mathbb{R}$ .

Mindre självklara exempel som vi kommer att studera är männen av olika sorters funktioner. Till exempel utgör mängden av alla polynomfunktioner ett vektorrum

över en talkropp. Vi kan också begränsa oss till alla funktioner som är periodiska över ett visst intervall<sup>1</sup>.

Ett speciellt viktigt exempel är alla funktioner som är periodiska över intervallet  $[0, 2\pi]$ .

Vektorrum där elementen är funktioner benämns *funktionsrum* (eng function space).

## 4 Metrik, norm och skalärprodukt

Matematiken som vetenskap byggs upp axiomatiskt. Det mest grundläggande begreppet är mängdbegreppet som på sätt och vis är mycket abstrakt och konkret på samma gång. En viktig egenskap alla mängder har är att de "från början" så att säga inte har några egenskaper. Bara för att man har en mängd, är det inte självklart hur man till exempel skall kunna addera elementen, avgöra avståndet mellan dem eller elementens storlek.

Begrunda mängden  $A = \{2, \text{bil}, \mathbb{R}\}$ . Vad kan du göra med denna mängd? Vad menas med  $2 + \text{bil}$ ?

Genom att införa struktur på mängder kan vi göra dem mer användbara. Tal-mängderna har en algebraisk struktur och vektorrum har en ännu mer avancerad algebraisk struktur.

Den mest fundamentala strukturen man kan införa på en mängd är en **topologi**, vilket innebär att man definierar hur en mängd kan delas in i delmängder. Vi skall inte använda topologibegreppet vidare i denna text och lämnar därför detta utan vidare kommentarer.

### 4.1 Metrik

En metrik är ett sätt att bestämma avståndet mellan två element i en mängd. Man använder ofta symbolen  $d$  för metrik, som i engelskans *distance*.

**Definition 4.1.1.** En *metrik*  $d$  på en mängd  $M$  är en funktion  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  med följande egenskaper.

1.  $d(a, b) \geq 0 \quad \forall a, b \in M$  med likhet endast om  $a = b$ .
2.  $d(a, b) = d(b, a) \quad \forall a, b \in M$ .
3.  $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c) \quad \forall a, b, c \in M$ . (Triangelolikheten)

▲

En metrik och en mängd utgör tillsammans ett **metriskt rum** (eng metric space). Om mängden har en vektorstruktur säger vi att vi har ett **metriskt vektorrum**.

Observera att det inte är nödvändigt med en vektorstruktur på mängden eftersom någon addition etc inte används i definitionen. Däremot är det vanligt att man definierar metriken på en viss mängd med en algebraisk operation som kräver en vektorstruktur.

Vi har i tidigare texter studerat olika metriker på  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbb{R}^3$ . Speciellt definierade vi den Euklidiska metriken

$$d(P, Q) = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}.$$

---

<sup>1</sup>I praktiken kan vi lika gärna anse att funktionerna bara är definierade på detta intervall.

**Definition 4.1.2.** Den *Euklidiska metriken* i  $\mathbb{R}^n$  ges av

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (P_k - Q_k)^2}. \quad (4.1)$$

▲

## 4.2 Norm

En norm är ett sätt att bestämma storleken av en vektor i ett vektorrum. Man använder ofta skrivsättet  $\|\mathbf{v}\|$  för normen av vektorn  $\mathbf{v}$ .

**Definition 4.2.1.** En *norm*  $\|\cdot\|$  på ett vektorrum  $\mathcal{V}$  (över kropp  $K$ ) är en funktion  $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$  med följande egenskaper.

1.  $\|\mathbf{v}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  med likhet endast om  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
2.  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\| \quad \forall a \in K, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ .
3.  $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{v} + \mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ . (Triangelolikheten).

▲

Som du ser innebär det sista kravet att det måste finnas en vektorstruktur (eller i alla fall en addition) definierad. Med denna definition av begreppet norm<sup>2</sup> är det alltså i allmänhet inte relevant att prata om normen på en mängd.

En norm och en mängd utgör ett **normerat rum** (eng normed space), och vi säger ett **normerat vektorrum** om mängden är ett vektorrum (eng normed vector space).

**Exempel 4.2.2.** Som norm på de vanliga talkropparna används oftast absolutbeloppet,  $\|a\|$  definieras till  $|a|$  för  $a \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  eller  $\mathbb{R}$ .

I  $\mathbb{C}$  används samma symbol och vi säger ofta "absolutbeloppet av  $z$ " då vi menar dess norm. Det kanske kan betraktas som en smaksak om ordet "absolutbelopp" bör reserveras för icke-komplexa tal eller inte. I  $\mathbb{C}$  gäller hur som helst

$$\|a + ib\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

I  $\mathbb{R}^2$  definieras  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

▲

**Definition 4.2.3.** Den *Euklidiska normen* i  $\mathbb{R}^n$  ges av

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2}. \quad (4.2)$$

▲

En fin egenskap med normbegreppet är att det inducerar en metrik på ett vektorrum enligt följande sats.

---

<sup>2</sup>Notera att 4.2.1 är definition av själva begreppet norm, medan uttrycket (4.2) är definition av en viss norm (i detta fall på  $\mathbb{R}^n$ ).

**Sats 4.2.4.** Om  $\|\cdot\|$  är en norm på ett vektorrum, ges en metrik på vektorrummet av  $d(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$ .

I ett bevis av denna sats måste vi visa att kraven i 4.1.1 är uppfyllda.

Rent geometriskt är satsen naturlig, och likheterna mellan (4.2) och (4.1.2) är uppenbara. Däremot kan denna likhet inte tas som bevis eftersom satsen gäller för alla inre-produktrum, medan dessa uttryck bara gäller för just  $\mathbb{R}^2$ .

### 4.3 Skalärprodukt

En *skalärprodukt* är ett sätt att multiplicera vektorer med varandra så att resultatet är ett tal. En synonym till skalärprodukt är inre produkt eftersom två vektorer i samma vektorrum multipliceras<sup>3</sup>. Av denna anledning benämns vektorrum där det finns en skalärprodukt *inre produktrum*<sup>4</sup> (eng inner product space).

**Definition 4.3.1.** En *skalärprodukt*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  på ett vektorrum  $\mathcal{V}$  över kroppen  $K$  (som är  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{C}$ ) är en funktion

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow K$$

med följande egenskaper som skall gälla för alla vektorer i  $\mathcal{V}$  och tal i  $K$ .

1.  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  med likhet endast om  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
2.  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^*$  (Konjugatsymmetri)
3.  $\langle a\mathbf{v} + b\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = a \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ .
4.  $\langle a\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, a^*\mathbf{u} \rangle$

Observera att notationen  $a^*$  betyder komplexkonjugatet av  $a$ . Detta är relevant i 1. och 4. om  $K = \mathbb{C}$ . ▲

Mindre tydligt uttryckt är alltså skalärprodukten en positivt definit konjugatsymmetrisk bilinjär funktion.

**Exempel 4.3.2.** I  $\mathbb{R}^2$  har vi sett att  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = v_x u_x + v_y u_y$  och i  $\mathbb{R}^n$  gäller på samma sätt

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=1}^n v_k u_k. \tag{4.3}$$

▲

Återigen är det så att en skalärprodukt i någon mening är ett bättre och mer användbart begrepp än norm. Vi kan också nämligen en norm om vi har en skalärprodukt.

**Sats 4.3.3.** Om  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  är en skalärprodukt på en mängd, ges en norm av

$$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}.$$

---

<sup>3</sup>Till skillnad från den yttre produkten där man definierar hur man multiplicerar vektorer från olika vektorrum så att resultatet blir en ny sorts objekt (till exempel en tensor).

<sup>4</sup>Man säger dock inte "skalärproduktrum".



Även här måste det bevisas att denna norm uppfyller kraven i 4.2.1.

Observera återigen att den uppenbara likheten mellan (4.3) och (4.2) inte kan tas som bevis för satsen, då dessa uttryck bara är definierade i  $\mathbb{R}^n$ .

Den geometriska tolkningen av begreppet skalärprodukt innebär att två vektorer är ortogonala om deras skalärprodukt är noll. Detta hämtar vi från specialfallet  $\mathbb{R}^n$ , men tolkningen gäller generellt.

En mängd vektorer som kan användas för att beskriva andra vektorer är praktisk att använda om de parvis är ortogonala och är normerade (har normen 1). Med andra ord, om  $\{\hat{e}_1 \dots \hat{e}_n\}$  är uppsättning basvektorer utgör dessa en ON-bas om

$$\langle \hat{e}_k, \hat{e}_l \rangle = \begin{cases} 0 & \text{om } k \neq l \\ 1 & \text{om } k = l \end{cases} .$$

Dessa vektorer spänner upp ett vektorrum med dimensionen  $n$ .

Komponenterna för en vektor  $\mathbf{v}$  i denna bas ges av

$$v_k = \langle \mathbf{v}, \hat{e}_k \rangle \tag{4.4}$$

och vektorn  $\mathbf{v}$  ges av

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n v_k \hat{e}_k. \tag{4.5}$$

Vi ska se hur motsvarigheten till detta blir i generella vektorrum, som kan vara oändligtdimensionella.

## 4.4 Ordning i strukturen

Om man skulle ha varit noga med ordningen mellan begreppen skulle vektorbegreppet ha kommit mellan metriskt rum och vektorrum. Därefter skulle begreppet basvektor ha kommit direkt.

Skalärprodukten (den inre produkten) skulle dock inte ha kommit förrän mellan normerat vektorrum och inreproduktrum. Därefter skulle vi ha kunnat definiera ortogonalitet.

Hur begreppshierarkin växer fram illustreras av bilden nedan. Notera hur vi får fler och fler verktyg allt eftersom vi inför mer struktur på mängden. Priset är mindre generalitet på de uttalanden vi gör om rummets egenskaper.

Det som är sant i ett inreproduktrum gäller nödvändigtvis inte i ett normerat vektorrum, men om vi hittar en egenskap för mängder gäller detta för alla typer av rum. Detta sätt att strukturera sina uttalanden är vanligt inom matematiken.

**Mängd**



Inför metrik för att kunna mäta avstånd mellan elementen i mängden.

**Metriskt rum**



Inför vektorstruktur, ett sätt att vandra rund i mängden.

**Vektorrum**



Inför en norm, ett sätt att uttala sig om längden av en vektor.

**Normerat vektorrum**



Inför skalärprodukt.

**Inreproduktrum**

## 5 Funktionsrum

Vi har nu sett att det alltså räcker att definiera en skalärprodukt på ett vektorrum för att det dessutom skall finnas en användbar norm och metrik<sup>5</sup>. Detta gäller även fall där den underliggande mängden är en mängd funktioner. Först måste vi dock reda ut att dessa har en naturlig Vektorstruktur.

### 5.1 Vektorstruktur

För "vanliga" vektorrum,  $\mathbb{R}^2$  och mer generellt  $\mathbb{R}^n$ , är detta mer eller mindre naturligt, men hur blir det i funktionsrum? Först måste vi reda ut att funktionsrum faktiskt är vektorrum.

Givet två funktioner  $f(x)$  och  $g(x)$  kan vi bilda en ny funktion  $h(x) = f(x) + g(x)$ . Vi kan också multiplicera en funktion med en konstant,  $h(x) = af(x)$  är relevant. Naturligtvis gäller allt detta för alla  $x$  i funktionernas definitionsmängd  $D$ .

Mängden av alla funktioner utgör alltså ett vektorrum över någon talkropp, vanligen  $\mathbb{R}$  eller  $\mathbb{C}$ .

### 5.2 Norm

Bäst känsla för begreppen metrik, norm och skalärprodukt kanske fås genom att först studera normen. En intuitiv förståelse för storleken av en funktion följer ur integralbegreppet.

Vi betraktar fortsättningsvis bara integrerbara funktioner definierade på någon delmängd  $D$  av  $\mathbb{R}$ . Vi benämner detta vektorrum  $L_2$ .

<sup>5</sup>En metrik möjliggör på samma sätt en topologi.

Givet två funktioner  $f(x)$  och  $g(x)$  är det kanske naturligt att

$$\|f(x)\| > \|g(x)\|$$

om

$$\int_D f(x)dx > \int_D g(x)dx.$$

Nu måste man komma ihåg att funktioner kan ha negativa värden, vilket kan göra värdet av en integral negativ. Att bara integrera  $f(x)$  är alltså ingen bra ide. Vi skulle kunna försöka med att definiera

$$\|f(x)\| = \int_D |f(x)|dx$$

istället. Det visar sig att denna norm (som brukar kallas  $L_1$ ) uppfyller kraven i definition 4.2.1. Den norm som liknar den Euklidiska normen mest ges i följande definition.

**Definition 5.2.1.** Normen i  $L_2$  (eller  $L_2$ -normen) ges av

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_D |f(x)|^2 dx}. \quad (5.1)$$

▲

Observera att absolutbeloppet i integranden finns för att  $f$  mycket väl kan vara en funktion av typen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Då blir det inte bra med  $f(x)^2$ .

Jämför uttrycken (4.2) och (5.1). Du ser att om man betraktar varje punkt på  $\mathbb{R}$  kan betraktas som en dimension, och att antalet dimensioner blivit (överuppräknligt) oändligt blir uttrycken i någon mening lika.

### 5.3 Skalärprodukt och metrik

Med  $L_2$ -normen som grund kan man vidare jämföra likheterna mellan norm (4.2) och skalärprodukt (4.3) i  $\mathbb{R}^n$  för att förstå hur en skalärprodukten i ett funktionsrum kan definieras.

**Definition 5.3.1.** Skalärprodukten i  $L_2$  ges av

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_D f(x)g(x)^* dx. \quad (5.2)$$

▲

Observera att man mycket väl skulle kunna definiera andra skalärprodukter i  $L_2$ , men detta är den man brukar mena med skalärprodukten i  $L_2$ .

På detta sätt är det också naturligt att definiera en metrik i  $L_2$ . Jämför (4.2) och (4.1).

**Definition 5.3.2.** Metriken i  $L_2$  ges av

$$d(f(x), g(x)) = \sqrt{\int_D |f(x) - g(x)|^2 dx}. \quad (5.3)$$

▲

## 6 Basvektorer i funktionsrum

Precis som i övriga vektorrum kan man i  $L_2$  beskriva vektorer med hjälp av basvektorer. Liksom tidigare är en uppsättning basvektorer en bra bas om de parvis är ortogonala och normerade (har normen 1). De utgör då en ON-bas<sup>6</sup>.

I detta avsnitt skall vi se på några exempel på basfunktioner som är bra i olika sammanhang, men för att jämföra med tidigare uttryck måste vi skriva upp några generella samband.

Det finns dock två saker som skiljer funktionsrum från vektorrummet  $\mathbb{R}^n$ . Dels är de ofta **oändligt dimensionella**, och vi måste skilja på de fall där basfunktionerna är **uppräknliga** respektive **överuppräknliga**.

I det uppräknliga fallet låter vi basfunktionerna betecknas med  $\hat{b}_k(x)$ , och komponenten för en funktion  $f(x)$  betecknar vi med  $f_k$ . Observera att  $k \in \mathbb{N}$  i detta fall. Vi får

$$f_k = \langle f(x), \hat{b}_k(x) \rangle = \int_D f(x) \hat{b}_k(x) dx \quad (6.1)$$

och

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \hat{b}_k(x). \quad (6.2)$$

Jämför dessa med (4.4) och (4.5).

Om basvektorerna är överuppräknliga är det lämpligare att benämna dem som en funktion av "uppräkningsvariabeln"  $k$ . Varje basvektor är också en funktion av  $x$ , skillnaden är att  $k \in \mathbb{R}$  i detta fall. Basfunktionerna betecknas alltså  $\hat{b}(k, x)$ .

Komponenterna blir också en funktion av  $k$ . Vi betecknar den med  $\tilde{f}(k)$ . Vi får

$$\tilde{f}(k) = \langle f(x), \hat{b}(k, x) \rangle = \int_D f(x) \hat{b}(k, x) dx \quad (6.3)$$

och

$$f(x) = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(k) \hat{b}(k, x) dk \quad (6.4)$$

För att konkretisera detta måste vi se på några exempel.

### 6.1 Diracs deltafunktion – En basvektor i varje punkt

Vi skall utveckla resonemanget i slutet av 5.2 genom att göra följande definition.

**Definition 6.1.1.** Symoblen  $\delta(x)$  beskriver en "funktion" med egenskaperna

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \neq 0 \\ \infty & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

---

<sup>6</sup>Se texten Geometriska vektorer, om vektorrummen  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbb{R}^3$ .

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

▲

Skrivsättet ovan är lite handviftande, men du kan tänka dig att vi i någon mening använder  $\infty \cdot 0 = 1$ . Det går naturligtvis att göra en matematiskt korrekt beskrivning<sup>7</sup> av denna symbol, som ibland benämns Diracs<sup>8</sup> deltafunktion.

Vidare gäller att alla funktionerna

$$\{\delta(x - a) \mid \forall a \in \mathbb{R}\}$$

parvis är ortogonala och att de är normerade eftersom

$$\langle \delta(x - a), \delta(x - b) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)\delta(x - b)dx = \begin{cases} 0 & \text{om } a \neq b \\ 1 & \text{om } a = b \end{cases}. \quad (6.5)$$

Poängen är de kan användas som basvektor som ”beskriver en funktion i en punkt” så att

$$f(a) = \langle f(x), \delta(x - a) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a)dx. \quad (6.6)$$

Jämför detta med (4.4). Motsvarigheten till (4.5) blir

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(x - a)da. \quad (6.7)$$

Summan över antalet basvektorer har blivit en integral eftersom mängden basvektorer är överuppräknelig.

**Definition 6.1.2.** Basen av Diracs deltafunktioner benämner vi *koordinatbasen*. ▲

I detta enkla exempel gäller att alla funktioner ”är komponenter av sig själv”,  $f(x) = \tilde{f}(a)$  för att jämföra med beteckningarna i inledningen till detta avsnitt.

## 6.2 Trigonometriska basvektorer – Fourierserier

I detta avsnitt studerar vi funktioner där  $D = [0, 2\pi]$ , alternativt definierade på hela  $\mathbb{R}$  men periodiska med perioden  $2\pi$ .

Det visar sig att basen som ges av funktionerna

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \mid \forall k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \mid \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

<sup>7</sup>Det är i själva verket ett exempel på en *distribution* som är en slags generaliserade funktioner som går att derivera i en vidare mening än vanliga funktioner. Fortsättningsvis benämner vi dem funktioner.

<sup>8</sup>Efter Paul A.M. Dirac

utgör en ON-bas.

Det är en nyttig övning att beräkna dessas skalärprodukt med varandra för att se att den blir noll i alla fall utom då man tar skalärprodukten mellan ett av elementen och samma element. Faktorn  $1/\sqrt{\pi}$  finns för att normen av alla element skall bli ett. Eftersom vi har tre klasser funktioner som bas får vi att en godtycklig funktion går att skriva

$$f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \quad (6.8)$$

där

$$a_0 = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \quad (6.9)$$

$$a_k = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} dx \quad (6.10)$$

$$b_k = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} dx. \quad (6.11)$$

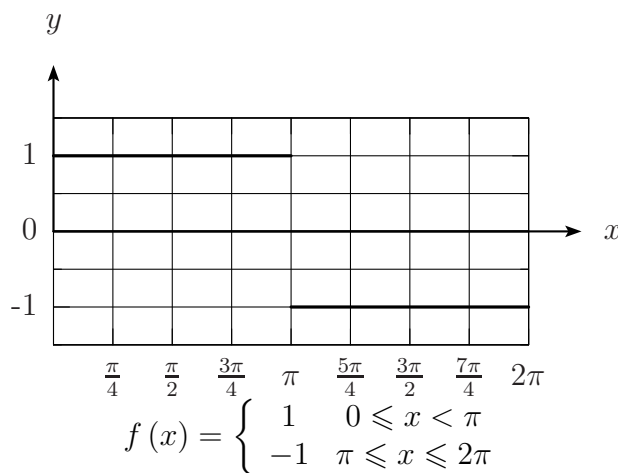
Eftersom mängden basvektorer är uppräknelig får vi en summa ovan.

Observera att  $a_0/\sqrt{2\pi}$  representerar funktionens medelvärde på  $D$ . Denna term behövs, eftersom alla andra termer "svänger med var sin amplitud" runt medelvärdet.

Uttrycket (6.8) brukar benämnas *Fourierserien* av  $f(x)$ .

### 6.2.1 Fyrkantvåg

Låt oss nu ta ett konkret exempel, vi definierar en funktion enligt grafen och uttrycket nedan.



Nu skall vi alltså betrakta  $f$  som en vektor i ett funktionsrum, där vi använder basfunktionerna från förra avsnittet för att spänna upp rummet. Den centrala frågan är vad  $f$  får för komponenter i denna bas, eller med andra ord hur  $f$  "pekar" i de olika riktningarna.

Vi börjar med att undersöka hur mycket  $f$  ”pekar” i riktningen  $\sin(kx)$ , eller hur mycket  $\sin(kx)$  det finns i  $f$ . Detta ges av skalärprodukten mellan  $f$  och  $\sin(kx)$ .

$$\begin{aligned} b_k = \langle f(x), \sin(kx) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\pi}^{2\pi} -1 \cdot \sin(kx) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\cos(kx)}{k} \right]_{\pi}^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \left( (\cos(k\pi) - \cos(k \cdot 0)) - (\cos(2k\pi) - \cos(k\pi)) \right) = \\ &= \frac{4}{k\sqrt{\pi}} (1 - \cos(k\pi)) = \begin{cases} 0 & \text{jämna } k \\ \frac{4}{k\sqrt{\pi}} & \text{udda } k \end{cases} \end{aligned}$$

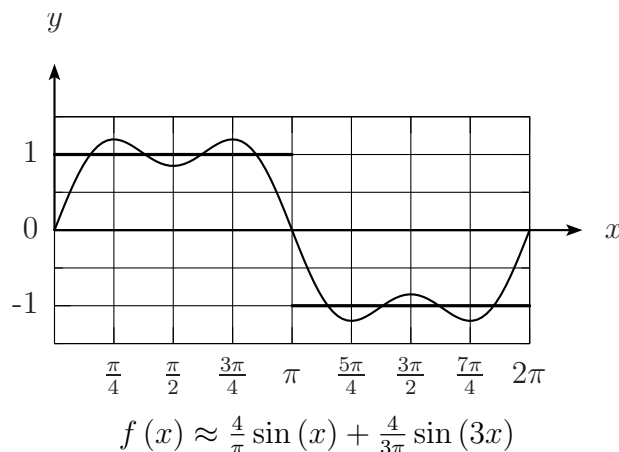
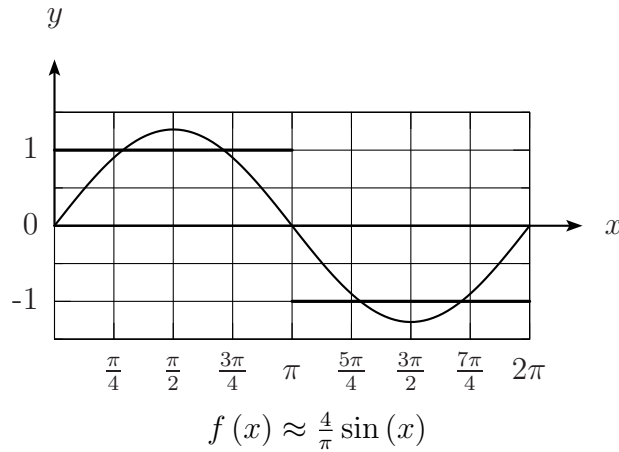
På samma sätt kan man härleda

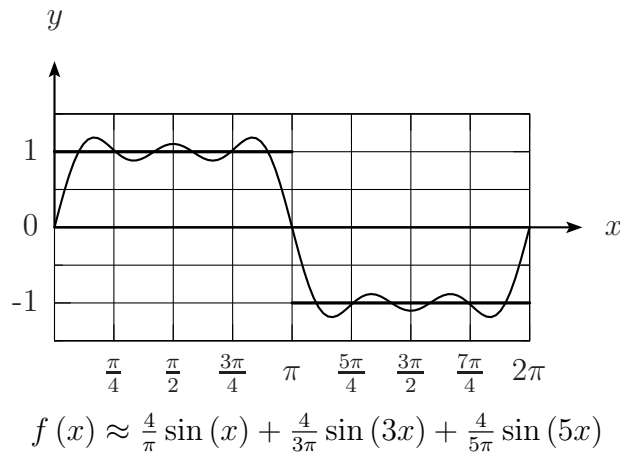
$$a_k = \langle f(x), \cos(kx) \rangle = 0 \quad \text{för alla } k.$$

Detta ger

$$f(x) = \sum_{\text{udda } k} \frac{4}{k\pi} \sin(kx).$$

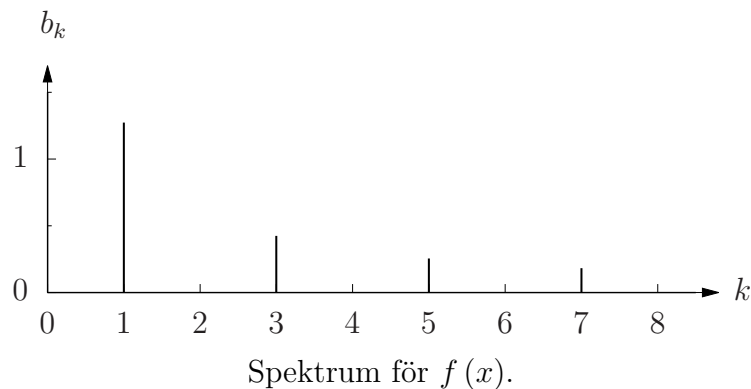
Följande bildserie visar hur vi närmar oss  $f(x)$  då vi tar med fler och fler komponenter.





Som synes närmar vi oss  $f(x)$  mer och mer för varje komponent vi lägger till. Med den metrik som är definierad på mängden kan vi räkna ut precis hur nära  $f(x)$  vi kommer, men det är bara en teknisk övning, så det hoppar vi över.

Nu när vi känner komponenterna för  $f(x)$  i rummet kan vi återge  $f$  på ett annat sätt än att rita  $f$  som funktion av  $x$ , vi kan rita  $b_k$  för olika  $k$ . Detta återges nedan.



Denna bild innehåller i princip samma information som grafen för  $f(x)$ . Just detta fall underlättas av att alla  $a_k$  är noll, så vi behöver inte rita dem. Ibland kallas denna information för funktionens **spektrum**.

### 6.2.2 Angående normeringen av basfunktionerna

Det är inte ovanligt att man utelämnar faktorn  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  i basfunktionerna. Då blir de inte normerade, men fortfarande ortogonala.

Varje basfunktion blir då större (tänk längre vektor), vilket gör att alla komponenter för någon funktion blir mindre. I fallet med fyrkantvågen ovan fås i så fall

$$b_k = \frac{4}{k\pi}$$

för udda  $k$ .

Man kan också införa en viktsfaktor  $\frac{1}{\pi}$  som en del av själva skalärprodukten så att man får uttryck som

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

och motsvarande för  $a_k$ .



Generellet definieras ofta skalärprodukten mellan två funktioner så att det finns en viktsfunktion  $w(x)$  så att

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_D f(x) g(x) w(x) dx$$

där syftet med  $w(x)$  ofta är att ”släcka ut” funktionerna då  $x \rightarrow \pm\infty$ .

### 6.2.3 Trigonometriska basfunktioner på komplex form

Ibland är det smidigt att använda ett komplext tal  $c_k$  istället de båda talen  $a_k$  och  $b_k$  i Fourierserien. Eftersom

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

kan man skriva

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

I denna mening säger vi att  $e^{ix}$  är en trigonometrisk funktion.

Fourierserien går då att skriva

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (6.12)$$

där

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (6.13)$$

Komponenterna  $c_k$  är nu komplexa tal, men observera att summan nu inte börjar på noll, utan går från  $-\infty$ . För att  $f(x)$  skall bli reell måste

$$\operatorname{Re}(c_k) = \operatorname{Re}(c_{-k})$$

och

$$\operatorname{Im}(c_k) = -\operatorname{Im}(c_{-k})$$

gälla.

## 6.3 Andra basfunktioner

I olika fysikaliska sammanhang dyker det upp klasser av funktioner som kan användas som baser som är praktiska i dessa situationer.

Ett exempel är **Legendrepolynomerna** som visas på omslaget till denna text. De är definierade på intervallet  $-1 \leq x \leq 1$ .

Fler exempel är **klotytfunktioner** och **Besselfunktioner** av olika slag. Dessa återkommer vi till senare.

Denna text kan inte visa på alla egenskaper för alla dessa klasser av funktioner, men de används på samma sätt som de trigonometriska funktionerna i en Fourierserie, men de passar som sagt bra i olika sammanhang.

## 7 Operatorer, egenvärden och svängningar

### 7.1 Operatorer och egenvärden

En avbildning mellan två ändligtdimensionella vektorrum kan beskrivas av en matris. Detta avhandlades i del II av denna serie. Nu skall vi se på motsvarande fall för funktionsrum. Vi måste hantera två problem, dels kan de vara av oändlig dimension, dels kan en överuppräknelig mängd basvektorer behöva användas.

**Definition 7.1.1.** En *operator* är en avbildning mellan två funktionsrum. ▲

**Exempel 7.1.2.** Exempel på operatorer är differentialoperatoren  $D(f) \equiv \frac{d}{dx}f$  som ger en ny funktion av en funktion, exempelvis  $D(x^2) = 2x$ .

Ofta sätter man ihop flera termer och benämner även summan av dessa differentialoperator. Operatoren

$$L(f) = (D^2 - D + 6)f \equiv f'' - f' + 6f$$

är exempel på en sådan.

Integraloperatoren  $I(f) \equiv \int f dx$  är ett annat exempel,  $I(x^2) = \frac{x^3}{3}$ . ▲

I de flesta exempel som tas upp på gymnasiet är avbildningen inte mellan olika funktionsrum, utan från ett rum till samma rum. Om man exempelvis deriverar man ett polynom får man ett polynom.

I högre matematiska sammanhang är man oftast intresserad av större klasser av funktioner, exempelvis operatorer från  $L_2$  till  $L_2$ .

### 7.2 Svängningar

Låt oss nu betrakta en kropp svänger upp och ned hängandes i en fjäder. Kraften från fjädern ges av Hookes lag,  $F = -ky$ , och förorsakar en acceleration enligt Newtons andra lag

$$ma \equiv mD^2(y) = -ky$$

vilket ger

$$D^2(y) = -\omega^2 y$$

med  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

Vi gör nu observationen att detta är ett egenvärdesproblem. Jämför med

$$A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Vi söker en funktion  $y(t)$  som när operatoren  $D^2$  verkar på den, bara förändras med en multiplikativ konstant  $-\omega^2$ . Lösningen  $y(t)$  är alltså en egenfunktion med egenvärdet  $-\omega^2$  till operatoren  $D^2$ .

Att lösa differentialekvationen är inga problem,  $y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  där  $A$  och  $B$  bestäms från villkor.

Om vi inför villkoren  $y(0) = y(T) = 0$  där  $T$  är periodtiden ( $y(t) = y(t + T)$ ) för en svängning fås  $A = 0$  och

$$\begin{aligned} B \sin(\omega T) &= 0 \\ \omega T &= 2\pi n \\ \omega_n &= \frac{2\pi n}{T}. \end{aligned}$$

Villkoren ger alltså till synes att alla vinkelfrekvenser inte är möjliga. Men operatorm  $D^2$  är linjär, så en summa av lösningar är också en lösning. En godtycklig svängning som uppfyller villkoren ges av

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right).$$

Andra villkor för  $y(0) = y(T)$  (dvs att svängningen är periodisk, men inte nödvändigtvis starta och sluta i  $y = 0$ ) skulle ge

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right).$$

Detta är naturligtvis en Fourierserie som alltså kan beskriva vilken periodisk svängning som helst.

Det fina i detta exempel är följande djupsinniga observation.

Kombinationen av en differentialoperator (här  $D^2$ ) och lämpliga villkor (här periodisk svängning) ger en uppsättning egenvärden (här vinkelfrekvenser) och till vardera av dessa en egenfunktion. Egenfunktionerna är parvis ortogonala och går att normera till en ON-bas. En godtycklig lösning kan bildas som en linjärkombination av dessa basfunktioner, dvs som en vektor i funktionsrummet.

Det som beskrivs ovan gäller inte alla differentialoperatorer, men det gäller för många fall som är intressanta i fysiken.

### 7.3 Vågor

Nästa naturliga exempel att ta upp är en endimensionell våg, exempelvis en svängning på en sträng eller tryckvåg i ett smalt rör.

Om  $f(x, t)$  beskriver vågen skall vågekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

där  $v$  är vågens utbredningshastighet.

Ett sätt att lösa denna PDE är att anta att  $f(x, t)$  går att skriva som en produkt av en rumsdel  $X(x)$  och en tidsdel  $\Gamma(t)$ . Namnet  $\Gamma$  är valt för att det inte skall förväxlas med svängningstiden  $T$ .

Vi får alltså  $f(x, t) = X(x)\Gamma(t)$  och när detta sätts in i vågekvationen fås

$$X''(x)\Gamma(t) = \frac{1}{v^2} X(x)\Gamma''(t)$$

vilket går att separera till

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{\Gamma''}{\Gamma}.$$

Eftersom VL bara beror av  $x$  och HL bara beror av  $t$  fås att båda måste vara lika med samma konstant  $-k^2$ . Detta ger

$$\begin{aligned} X'' &= -k^2 X \\ \Gamma'' &= -k^2 v^2 \Gamma. \end{aligned}$$

Vi får alltså två egenvärdesproblem, med egenvärdena  $-k^2$  respektive  $-k^2 v^2$ . Om svängningen är periodisk i både rum och tid fås med samma resonemang som i förra avsnittet

$$X(x) = \sum_{n=0} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$$

$$\Gamma(t) = \sum_{n=0} C_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + D_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

där  $L$  är svängningens period i rummet och  $T$  är svängningstiden. Produkten av dessa ger alltså  $f(x, t)$ .

Här kan det vara på sin plats att repetera några begrepp från fysiken. Konstanten  $k$  benämns **vågtalet** och fyller samma funktion i rummet som **vinkelhastigheten**  $\omega$  gör i tiden, jämför

$$kL = 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

vilket ger

$$kL = \omega T.$$

Vågens utbredningshastighet ges av

$$v = \frac{L}{T}$$

vilket ger

$$\omega = kv.$$

I fallet där en sträng som sitter fast i sina ändpunkter svänger, dvs  $X(0) = X(L) = 0$ , och som sätts i svängning så att maximal amplitud inträffar då  $t = 0$ , fås

$$f(x, t) = \sum_{n=0} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

Observera att kravet  $f(x, t) = f(x + L, t)$  har skippats i detta fall eftersom strängen bara finns mellan  $0 \leq x \leq L$ . Faktorn 2 i argumentet till rumsdelen utgår då. Minns från fysiken att strängens grundton har våglängden  $2L$ .

## 7.4 Två dimensioner

I två dimensioner blir motsvarande situation ett trumskinn som spänns upp på en ram. Precis som i det endimensionella fallet behöver egentligen inte skinnets spänns upp på något, men det tillför inget till förståelsen att behandla det allmänna fallet. Skillnaden blir bara cosinus-termer i rumsdelen i uttrycken nedan.

Beroende på ramens form fås olika fall.

### 7.4.1 Kartesisiska koordinater

Om ramen är rektangulär med måtten  $A$  och  $B$  i x- respektive y-led fås

$$f(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{mn} \sin\left(\frac{2\pi m}{A}x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{B}y\right) \right) \cos(\omega_{mn}t)$$

där

$$\omega_{mn} = v \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{A}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{B}\right)^2}. \quad (7.1)$$

Uttrycket för  $\omega_{mn}$  påminner lite om någon sorts avstånd från "origo" i indexen  $m$  och  $n$ . För en våg beror energin som finns lagrad i vågen på vinkelfrekvensen (jämför med  $E = \hbar\omega$  i kvantmekaniken).

Om man tänker sig att man har en viss mängd energi kan man i ena ytterligheten använda den till att bara låta membranet svänga med grundtonen i x-led och med "resterande energi" i y-led. I den andra ytterligheten kan man göra tvärt om.

Men man kan också använda energin till att svänga med olika kombinationer av vinkelfrekvenser i x-led respektive y-led, så länge energin summerar till den energi man har tillgång till. Denna summa ger upphov till (7.1).

#### 7.4.2 Polära koordinater

På en cirkel används lämpligen polära koordinater  $(r, \theta)$ . Cirkeln beskrivs på  $[0, R] \times [0, 2\pi]$ .

$$f(r, \theta, t) = \sum_{m,n}^{\infty} J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{R}r\right) (a_{mn} \cos(m\theta) + b_{mn} \sin(m\theta)) \cos(\omega_{mnt})$$

där  $J_0$  är **Besselfunktion** nr 0 och  $\alpha_{0n}$  är nollställe  $n$  för  $J_0$ .

Besselfunktionerna  $J_n$  är också en uppsättning funktioner som parvis är ortogonala och därmed kan användas som en praktisk bas.

Besselfunktionerna finns i flera varianter. Denna variant används också i tre dimensioner i cylindriska koordinater  $(r, \theta, z)$  och kallas därför ibland *cylindriska Besselfunktioner*.

### 7.5 Tre dimensioner

I tre dimensioner är det svårt att tänka sig en sträng som svänger, men man kan tänka sig en ljudvåg som fortplantar sig i ett slutet rum.

#### 7.5.1 Kartesiska koordinater

Om rummet har formen av ett rätblock med sidorna  $A$ ,  $B$  och  $C$  fås en enkel utvidgning av fallet i två dimensioner. Nu fås

$$f(x, y, z, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{mnl} \sin\left(\frac{2\pi m}{A}x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{B}y\right) \sin\left(\frac{2\pi l}{C}z\right) \right) \cos(\omega_{mnl}t)$$

där

$$\omega_{mnl} = v \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{A}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{B}\right)^2 + \left(\frac{2\pi l}{C}\right)^2}.$$

### 7.5.2 Cylindriska koordinater

Om det är frågan om en ljudvåg i ett cylindriskt rör med längden  $L$ .

$$f(r, \theta, t) = \sum_{m,n,q}^{\infty} J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{R}r\right) (a_{mn} \cos(m\theta) + b_{mn} \sin(m\theta)) \sin\left(\frac{2\pi q}{L}z\right) \cos(\omega_{mnq}t).$$

### 7.5.3 Sfäriska koordinater

Sfäriska koordinater  $(r, \theta, \phi)$  ger **klotytfunktioner**  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  för vinkelberoendet och **sfäriska Besselfunktioner**  $j_0(r)$  för den radiella delen.

$$f(r, \theta, \phi, t) = \sum_{nlm} a_{nlm} j_0\left(\frac{\alpha_{0n}r}{R}\right) Y_{lm}(\theta, \phi) \cos(\omega_{nlm}t).$$

## 8 Icke-Periodiska funktioner

Nu återgår vi till att betrakta funktioner definierade på hela  $\mathbb{R}$ .

För att beskriva en icke-periodisk funktion  $f(x)$  med de trigonometriska funktionerna måste man låta intervallet som studeras gå mot oändligheten. Då övergår summan i (6.8) till en integral och vi får

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \quad (8.1)$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (8.2)$$

Basfunktionerna är

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad \forall k \in \mathbb{R} \right\} \quad (8.3)$$

vilka är överuppräknligt många, därför kan komponenterna  $\hat{f}(k)$  betraktas som en funktion  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Funktionen  $\hat{f}(k)$  brukar benämnas *Fouriertransformen* av  $f(x)$ .

För att underlätta visualiseringen måste vi komma ihåg att det råder likheter mellan rum-vågtal och tid-frekvens. Vid ett fixt ögonblick (i tiden) beskrivs en våg av uttryck på formen  $\sin(kx)$  och vid en fix punkt (i rummet) beskrivs en våg av uttryck på formen  $\sin(\omega t)$ .

På samma sätt liknar begreppen våglängd ( $\lambda$ ) och periodtid ( $T$ ) varandra matematiskt och fyller samma funktion i rum respektive tid. Vi har också sambanden

$$\begin{aligned} k\lambda &= 2\pi \\ \omega T &= 2\pi. \end{aligned}$$

Begreppet frekvens associeras oftast till svängningar i tiden, men vågtalet beskriver alltså en frekvens i rummet på samma sätt. Vi gör följande definition.

**Definition 8.0.1.** Basen i (8.3) benämns *frekvensbasen*. ▲

En fysiker skulle invända att det i själva verket är frågan om *vinkel*-frekvensbasen. Det är helt riktigt, men vi tillåter oss att förkorta språkbruket här. Vi gör ingen skillnad i språkbruk mellan frekvens och vinkelfrekvens. Den matematiska skillnaden blir att en faktor  $\sqrt{2\pi}$  dyker upp på olika ställen i de båda fallen.

Transformteori brukar ibland betraktas som en egen del av matematiken, ofta ges det som en egen kurs på ca C-nivå. På vissa lärosäten ges denna teori som en del av en kurs i signalanalys etc. Ett huvudsyfte med detta avsnitt är att visa att det i själva verket bara är fråga om ett basbyte. I specialfallet Fouriertransformen mellan koordinatbasen och frekvensbasen. Andra transformer använder andra baser.

Ännu så länge i denna texts utveckling har vi inte möjlighet att reda ut alla egenskaper för detta basbyte. Ett mycket viktigt specialfall skall vi i alla fall avhandla.

Tar man hänsyn till både tid och rum beskrivs en våg av uttryck på formen  $\sin(kx - \omega t)$ , men här nöjer vi oss med att studera en våg vid ett fixt ögonblick eftersom det är lättare att visualisera något som finns i rummet än något som finns i tiden. Vågen kan vara vågfunktionen för en partikel i kvantmekaniken, en akustisk våg, en ljusvåg etc.

Vågen har ett väl definierat vågtal  $k_0$  och beskrivs alltså av

$$\hat{f}(k) = \delta(k - k_0).$$

Om vi byter bas till koordinatbasen med (8.1) får vi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k - k_0) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 x}$$

vilket är precis en våg med vågtal  $k_0$ . Poängen är att vågen är oändligt utspridd i rummet.

Omvänt, om vi har en partikel med en väl definierad koordinat  $x_0$ , så att den beskrivs av en funktion

$$f(x) = \delta(x - x_0)$$

blir dess beskrivning i frekvensrummet

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}.$$

Denna funktion finns alltså för alla  $k$ , vi får en oändlig utspridning i frekvensrummet.

Detta gäller också i tid och rum. Exempelvis finns det vardagliga fenomen där en strömbrytare som slås på eller av kan störa en radiosignal. Det beror på att den väl definierade förändringen i tid (själva tidpunkten för förändringen av strömbrytarens läge) ger en stor spridning av samma signal då den beskrivs i frekvensbasen. Därför kan du ibland höra ett knäpp i en radiomottagare då du slår på ljuset i ett rum.

Detta fenomen kan också orsaka mycket oönskade störningar. Det är alltså långt ifrån ett matematiskt fenomen, trots att det i matematiken bara är frågan om att beskriva samma vektor i två olika baser. Vilken bas som "är den riktiga" är en intressant fråga. Vi är vana med rum och tid, men vågtal och frekvens tycks vara likvärdigt.

## 9 Sammanfattning och jämförelse

Det kan vara illustrativt att repetera några uttryck och skriva dem bredvid varandra så att likheterna framträder tydligare.

Begrepp	$\mathbb{R}^n$ -lika rum	Funktionsrum	Definition	Exempel
Norm	$\ \mathbf{v}\  = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2}$	$\ f(x)\  = \sqrt{\int_D  f(x) ^2 dx}$	(4.2)(5.1)	(6.1.1)
Skalärprodukt	$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=1}^n v_k u_k$	$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_D f(x)g(x)^* dx$	(4.3)(5.2)	(6.5)
Komponenter	$v_k = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{e}}_k \rangle$	$f_k = \int_D f(x)\hat{b}_k(x) dx$	(4.4)(6.1)	(6.9)-(6.11)
		$\tilde{f}(k) = \int_D f(x)\hat{b}(k, x) dx$	(6.3)	(6.13) (6.6)(8.2)
Vektor	$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n v_k \hat{\mathbf{e}}_k$	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \hat{b}_k(x)$	(4.5)(6.2)	(6.8)(6.12)
		$f(x) = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(k) \hat{b}(k, x) dk$	(6.4)	(6.7)(8.1)

## 10 Kvantmekanik

### 10.1 Energinivåer

Schrödingerekvationen är en differentialekvation som kan betraktas som ett egenvärdesproblem. Operatoren

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (10.1)$$

beskriver till exempel en elektron som befinner sig i någon potential  $V(x)$ . Denna operator benämns *Hamiltonianen*. Då  $H$  verkar på funktionen  $\psi(x)$  fås egenvärdesproblemet

$$H \psi(x) = E\psi(x). \quad (10.2)$$

Egenfunktionerna till  $H$  är parvis ortogonala och om elektronen befinner sig i ett tillstånd som beskrivs av en egenvektor är dess energi motsvarande egenvärde.

Ett godtyckligt tillstånd kan beskrivas som en linjärkombination av egenfunktionerna.



## 10.2 Motivering av Schrödingerekvationen

Kvantmekaniken växte fram ur experiment som gjordes i slutet på 1800-talet, där man kunde påvisa att partiklar både hade partikel- och vågegenskaper. Det tvistades länge om huruvida ljus var partiklar eller vågor, men även till exempel elektroner visade båda egenskaperna. Läs mer om detta i ett läromedel i fysik.

Det enklaste fallet beskriver en partikel som är instängd i en låda. Både partikeln och lådan är i en dimension. Matematiskt kan då partikeln beskrivas som en funktion som brukar betecknas med  $\Psi(x, t)$ . Denna funktion skall tolkas så att sannolikheten att hitta partikeln inom intervallet  $[a, b]$  är

$$\int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx.$$

Funktionen  $\Psi(x)$  uppfyller differentialekvationen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + V(x) \Psi = -i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

där  $m$  är partikelns massa och  $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$  (utläses h-streck) där  $h$  är Plancks konstant. Denna differentialekvation brukar benämnas Schrödingerekvationen, efter fysikern Erwin Schrödinger (1887 - 1961) som bidrog mycket till kvantmekanikens framväxt. Han erhöll Nobelpriset 1933.

Schrödingerekvationen kan motiveras på följande sätt. Man hade funnit att partikeln var en våg (eller snarare kunde beskrivas som en våg, vad partikeln faktiskt är vet ingen). Lösningarna borde alltså vara ungefär på formen  $\Psi \sim e^{i(kx - \omega t)}$ . Man hade gjort experiment som stödjer att sambandet mellan rörelsemängd  $p$  och De Broglie-våglängden  $\lambda$  är

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

och sambandet mellan energi och frekvens respektive vinkelfrekvens är

$$E = hf = \hbar\omega.$$

Detta gällde i alla fall "ljuspartiklar" och kunde då även antas gälla även för "elektronvågor". Att dessa begrepp sätts inom situationstecken beror på att de var obegripliga vid denna tid. Kvantmekaniken skulle ju förklara just detta.

Sambandet mellan våglängd och vågtal  $k$  skiljer sig inte från vanlig vågrörelselära,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

vilket ger

$$p = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k.$$

Enligt vanlig klassisk fysik gäller sambandet

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

mellan partikelns rörelseenergi  $E_k$  och rörelsemängd (via  $p = mv$ ).

Schrödinger observerade att man så att säga får ut  $k$  genom att derivera  $\Psi$  med avseende på  $x$ . Om man dessutom multiplicerar med  $-i\hbar$  fås

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi = -i^2 \hbar k \Psi = \hbar k \Psi = p \Psi.$$

På samma sätt fås

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -i^2 \hbar \omega \Psi = \hbar \omega \Psi = E \Psi.$$

Om man gör bytet

$$\begin{aligned} p &\rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ E &\rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

fås

$$\frac{p^2}{2m} = E \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

Om det finns potentiell energi  $V(x)$  får man en term till i Schrödingerekvationen:

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi}_{\text{Kinetisk energi}} + \underbrace{V(x) \Psi}_{\text{Potentiell energi}} = \underbrace{-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi}_{\text{Total energi}}.$$

Om man bara är intresserad av rumsdelen av  $\Psi$  kan man separera rumsdelen och tidsdelen enligt

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \Gamma(t)$$

så att ekvationen för rumsdelen blir

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x). \quad (10.3)$$

Detta uttryck benämns ibland den **tidsoberoende Schrödingerekvationen** och är alltså egenvärdesproblemet (10.2) för operatoren (10.1).

Det är dock inte helt sant att systemet är tidsoberoende. I varje punkt "snurrar" ett komplext tal runt i det komplexa talplanet. Rotationshastigheten motsvarar energin hos partikeln. Funktionen  $\psi(x)$  anger bara storleken av det komplexa tal som snurrar runt.

### 10.3 Partikeln i lådan

Detta fall karakteriseras av att partikeln är instängd i en (endimensionell) låda med längden  $L$ . Partikeln kan omöjligen ta sig ut ur lådan, vilket betyder att den potentiella energin är

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, L] \\ \infty & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi behöver dock inte bekymra oss om detta. Partikeln kommer helt enkelt inte att kunna existera utanför lådan, och all energi partikeln har kommer att vara kinetisk energi. Kravet på kontinuitet gör att  $\psi$  måste vara noll även på kanten av lådan, det

räcker alltså att lösa ekvation (5) med kravet att  $\psi$  är noll utanför och på kanten av lådan.

Vi skriver om (10.3) som

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi = -\frac{2Em}{\hbar^2}\psi$$

vilken har lösningen,

$$\psi(x) = A \sin(kx)$$

där

$$k^2 = \frac{2Em}{\hbar^2}. \quad (10.4)$$

Lösningarna kan liknas med att partikeln betraktas som en sträng som sitter fast i lådans ändpunkter. De olika lösningarna kan då liknas med strängens grundton, första överton, andra överton och så vidare. De olika tonerna svarar mot olika energier.

Naturligtvis uppfyller även uttryck som innehåller  $\cos(k_n x)$  differentialekvationen, men de uppfyller inte att lösningen skall vara noll på lådans kanter, i alla fall inte då  $x = 0$ , så vi förkastar dessa av fysikaliska skäl.

Kravet att  $\psi(L) = 0$  ger oss de möjliga värden som  $k$  kan anta enligt

$$k_n = \frac{\pi n}{L}.$$

Används detta i (10.4) fås likheten

$$k_n^2 = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 = \frac{2E_n m}{\hbar^2},$$

vilket ger oss de tillåtna värden som energin kan anta:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2L^2 m}.$$

Jämför detta med de tillåtna energinivåerna för en elektron i en väteatom.

Historiskt var Schrödinger inte så intresserad av  $\psi(x)$ . Han var mer intresserad av egenvärdena  $E_n$ . Han ville beräkna de energinivåer som följde ur Bohrs postulat, och som Ångström mätt upp och Balmer skapat ett empiriskt uttryck för.

Schrödinger använde Coulombpotentialen för en elektron i fältet från atomkärnan och var förstas tvungen att räkna i tre dimensioner. Han lyckades på detta sätt härleda de eftersökta energinivåerna.

En djupare analys av vågfunktionen ger andra resultat, exempelvis hur många elektroner som kan ha samma energi (befinna sig i samma "skal"). Hela periodiska systemet faller i någon mening ut som lösning till Schrödingerekvationen.

Konstanten  $A$  måste väljas så att

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1$$

eftersom sannolikheten att hitta partikeln i lådan måste vara 1. Detta ger oss

$$\int_0^L A^2 \sin^2(k_n x) dx = \frac{A^2}{2} \int_0^L 1 - \cos(2k_n x) dx = \frac{A^2 L}{2} = 1$$

och

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

De funktioner som representerar en partikel inneslängd i en låda ges alltså av

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)$$

för olika  $n$ . Jämför detta med basen av trigonometriska funktioner som togs upp tidigare. Även dessa kommer att vara parvis ortogonala:

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq m \\ 1 & \text{om } n = m. \end{cases}$$

## 10.4 Förväntasvärden

I tidigare texter har vi studerat uttryck på formen  $\mathbf{v}^T A \mathbf{v}$  där  $A$  är en matris och  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Detta tolkade vi som "hur mycket som blir kvar av  $\mathbf{v}$  då  $A$  verkar på den". Speciellt gäller att om  $\mathbf{v}$  är en (normerad) egenvektor till  $A$  med egenvärde  $\lambda$  blir  $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} = \lambda$ .

För en allmän vektor blir det något annat värde, vilket i någon mening kan betraktas som "det värde man kan förvänta sig av  $A$ ", vilket vi också benämnde *förväntansvärdet* av  $A$ .

Denna tolkning är inte unik för ändligtdimensionella rum.

**Definition 10.4.1.** *Förväntansvärdet* av en operator  $A$  då den verkar på en (normerad) funktion  $f(x)$  är  $\langle f(x), Af(x) \rangle$ . ▲

Förväntansvärdet är alltså ett framräknat medelvärde. En alternativ notation som liknar den som används i statistiken är

$$\mu_f(A) = \langle f(x), Af(x) \rangle.$$

Om funktionen inte är normerad gäller

$$\mu_f(A) = \frac{\langle f(x), Af(x) \rangle}{\langle f(x), f(x) \rangle}.$$

## 10.5 Förväntasvärden i kvantmekaniken

Förväntansvärden i kvantmekaniken skall tolkas enligt följande. Om man preparerar väldigt många lika tillstånd  $\Psi(x, t)$  (exempelvis skickar elektroner med samma spin och rörelseenergi mot något där de växelverkar med målet) och mäter vad man observerar (exempelvis var elektronerna hamnar eller hur spinnet ändras), får man olika resultat i varje mätning eftersom tillståndsfunktionen bara anger en sannolikhetsfördelning.

Däremot kan man beräkna medelvärdet av vad man observerar från mätserien. Detta är sammanfaller med förväntansvärdet av operatören som representerar vad man observerar.

På samma sätt kan man beräkna den förväntade standardavvikelsen från tillståndet, och den sammanfaller förstås med standardavvikelsen för vad som mäts upp.

Med en notation från statistiken skriver vi

$$\sigma_A(f(x)) = \sqrt{\langle f(x), (A - \mu_A(f(x))) f(x) \rangle^2}.$$

Om operatoren  $A$  är positionsoperatoren betecknar fysiker ofta denna standardavvikelse  $\Delta x$ , och motsvarande för andra operatorer/observabler.

Det är vanligt att detta begrepp förväxlas med osäkerheten i en enskild mätning (som beror på mätutrustningens noggrannhet).

### 10.5.1 Förväntansvärden från egentillstånd

Antag att en elektron befinner sig i ett tillstånd som beskrivs av två egenfunktioner till Hamiltonianen,

$$\psi(x) = k_1 \hat{\psi}_1(x) + k_2 \hat{\psi}_2(x)$$

Detta tillstånd är normerat, så  $|k_1|^2 + |k_2|^2 = 1$ .

Om vi vill mäta vilken energi detta tillstånd har förväntar vi oss att det blir

$$\langle \psi(x), H\psi(x) \rangle$$

vilket beräknas till

$$\begin{aligned} \langle k_1 \hat{\psi}_1(x) + k_2 \hat{\psi}_2(x), H(k_1 \hat{\psi}_1(x) + k_2 \hat{\psi}_2(x)) \rangle &= \\ k_1 k_1^* \langle \hat{\psi}_1, H\hat{\psi}_1 \rangle + k_1 k_2^* \langle \hat{\psi}_1, H\hat{\psi}_2 \rangle + & \\ k_1 k_2^* \langle \hat{\psi}_2, H\hat{\psi}_1 \rangle + k_2 k_2^* \langle \hat{\psi}_2, H\hat{\psi}_2 \rangle &= \\ |k_1|^2 E_1 \langle \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1 \rangle + k_1 k_2^* E_2 \langle \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2 \rangle + & \\ k_1 k_2^* E_1 \langle \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_1 \rangle + |k_2|^2 E_2 \langle \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_2 \rangle &= |k_1|^2 E_1 + |k_2|^2 E_2 \end{aligned}$$

vilket är precis det viktade medelvärdet av  $E_1$  och  $E_2$ .

Observera hur konjugatsymmetrin och ortogonaliteten nyttjas. För operatorer som beskriver fysikaliska storheter<sup>9</sup> i kvantmekaniken gäller att dess egenfunktioner är ortogonala, därför gäller

$$\langle \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2 \rangle = \langle \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_1 \rangle = 0.$$

Dessutom gäller att egenvärdena för denna klass operatorer är reella, så  $E_k = E_k^*$ .

## 10.6 Heisenbergs olikhet

Beviset för Heisenbergs olikhet är definitivt att betrakta som överkurs. Syftet med att ändå ta med det är:

- 1 Att visa att det är frågan om ett matematisk resultat. Fysiker använder ofta svepande formuleringar om "osäkerhet" utan att berätta att det gäller just standardavvikelse och förväntansvärden. Om någon fysiker menar något annat med "osäkerhet" måste fysikern berätta vad som avses, och Heisenbergs olikhet behöver då inte gälla.

<sup>9</sup>Dessa benämns också *observabler*, eftersom man kan observera dem.

2 Det är inte ett jätteavancerat bevis. Det är nästan begripligt med teorin som tas upp här. Tyvärr utelämnas det ändå ofta i grundkurser om kvantmekanik på universitetsnivå. Läser du en sådan kurs, ta fram dessa anteckningar!

3 Att inspirera till att läsa en kurs om operator teori. Det är en mycket vacker teori som växte fram som en följd av kvantmekaniken på 1920-talet.

### Sats

För två självdjungerade<sup>10</sup> operatorer  $A$  och  $B$  med  $L^2(-\infty, \infty)$  som både värdemängd och definitionsmängd så gäller för  $[A, B]$  att

$$|\mu_\Psi([A, B])| \leq 2\sigma_\Psi(A)\sigma_\Psi(B)$$

för alla  $\Psi$ .

### Bevis

Vi inför  $\mu_A = \mu_\Psi(A)$  och  $\mu_B = \mu_\Psi(B)$  samt operatorerna  $S = A - \mu_A I$  och  $T = B - \mu_B I$  där  $I$  är enhetsoperatoren.

Det gäller att  $AB - BA = ST - TS$ , samt att både  $S$  och  $T$  är självdjungerade.

Vi får då

$$\begin{aligned} \mu_\Psi([A, B]) &= \langle (ST - TS)\Psi, \Psi \rangle \\ &= \langle ST\Psi, \Psi \rangle - \langle TS\Psi, \Psi \rangle \\ &= \langle T\Psi, S\Psi \rangle - \langle S\Psi, T\Psi \rangle. \end{aligned}$$

För absolutbeloppet av VL och HL gäller

$$|\mu_\Psi([A, B])| \leq |\langle T\Psi, S\Psi \rangle| + |\langle S\Psi, T\Psi \rangle|.$$

De två termerna i HL ovan är lika. Vidare gäller generellt olikheten<sup>11</sup>

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Med denna fås

$$|\mu_\Psi([A, B])| \leq 2 \|S\Psi\| \cdot \|T\Psi\|.$$

Som vi definierade  $S$  och  $T$  gäller

$$\|S\Psi\| = \sqrt{\langle (A - \mu_A I)\Psi, (A - \mu_A I)\Psi \rangle} = \sqrt{\langle (A - \mu_A I)^2\Psi, \Psi \rangle} = \sigma_\Psi(A)$$

och på samma sätt för  $\|T\Psi\|$ . Vi får då den eftersökta likheten

$$|\mu_\Psi([A, B])| \leq 2\sigma_\Psi(A)\sigma_\Psi(B).$$

<sup>10</sup>En operator  $A$  är självdjungerad (self adjoint) om  $\langle A\Psi, \Psi \rangle = \langle \Psi, A\Psi \rangle$ . Med Diracs notation  $\langle \Psi | A | \Psi \rangle$  kan så att säga en självdjungerad operator ”verka åt båda hållen”. För alla situationer som är relevanta i kvantmekaniken har dessa operatorer egenskapen att deras egenvärden är reella och deras egenvektorer är ortogonala. En finess som används i beviset på denna sida är  $\langle A^2\Psi, \Psi \rangle = \langle A\Psi, A\Psi \rangle$ .

<sup>11</sup>Denna olikhet går under namnet Schwarz olikhet. Den går att motivera från

$$\langle x, y \rangle = \cos(\theta)\|x\| \cdot \|y\|,$$

men man måste komma ihåg att detta inte är ett bevis utan något som kan tas som definition på vinklar. Beviset för olikheten utelämnas ur denna text.

Med notation från fysiken och exemplet att observablerna är läge  $x$  och rörelsemängd  $p$ , med motsvarande operatorer  $x_{\text{Op}} \equiv x$  och  $p_{\text{Op}} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  fås

$$\frac{\hbar}{2} \leq \Delta x \Delta p.$$

Man kan nämligen visa att kommutatorn

$$|\mu([x_{\text{Op}}, p_{\text{Op}}])| = \hbar$$

oberoende av vilket tillstånd kommutatorn verkar på.

Detta tolkas ofta som att man inte kan bestämma läget speciellt noga om man redan har bestämt rörelsemängden med hög noggrannhet.

Detta är dock ett missförstånd. Om man bestämmer läget för en partikel får man reda på läget utan osäkerhet (teoretiskt). Men då förändrar man tillståndet vars rörelsemängd man tänker sig bestämma.

Heisenbergs olikhet uttalar sig om upprepade mätningar på **lika** tillstånd.

Istället för den ”negativa” tolkningen kanske man borde tolka Heisenbergs olikhet lite mer positivt. Förväntansvärdet av kommutatorn betyder ”skillnaden mellan att man först mäter det ena och sedan det andra, respektive i omvänd ordning”.

Denna är alltså **mindre** än produkten av respektive observablers standardavvikelse.

## 11 Slutord

Jag hoppas nu du fått en liten insikt i några begrepp som bygger upp denna del av matematiken, från enkla exempel på metrik till skalärprodukt i oändligt dimensionella vektorrum.

I många tillämpningar av detta studeras dessa delar var för sig, vilket kan röra till det. Det blir lätt så att man inte ser skogen på grund av alla träden. Det finns väldigt många tillämpningar av denna teori, men viktigast<sup>12</sup> är kanske signalbehandling och kvantmekaniken.

Förhoppningen är att denna text skall hjälpa dig att fortare förstå att många tekniker för problemlösning i själva verket handlar om att byta bas i ett vektorrum.

Det finns dock djupare insikter att sträva efter. Vi upplever koordinatbasen och tiden som naturliga, men i många fall verkar det som att det är i frekvensbasen som saker ”händer”. Hela kvantmekaniken bygger på att beskriva tillstånd i olika baser. Partiklar finns inte på en plats utan representeras av en vektor i ett funktionsrum. Växelverkan med omgivningen beskrivs av en operator som förändrar denna vektor.

Att förstå denna gren av matematiken är alltså mycket viktig för att förstå stora delar av ”verkligheten”, vad nu än som menas med det.

---

<sup>12</sup>Om man ser till innehållet i många civilingenjörsutbildningar.