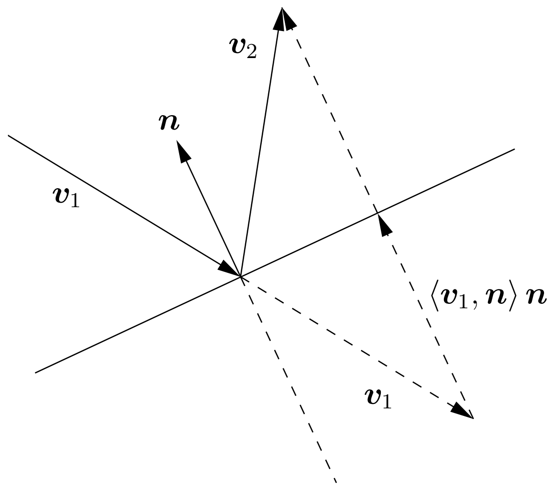


Linjär Algebra

Del I – Vektorgeometri

Johan Wild

2023–04–27

johan.wild@europaskolan.se

2023–04–27

Innehåll

1 Inledning

Denna lilla text är tänkt att introducera begreppet vektor på ett sådant sätt att det harmonierar både med det centrala innehållet i de nationella kurserna Matematik 1c och Fysik 2 samt med de lokala kurserna Axiomatiska System och Linjär Cirkel på Europaskolan.

I denna text behandlas uteslutande vektorrummen $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^n$. Syftet med texten är att ge geometrisk mening åt vektorbegreppet och relaterade begrepp. Vi skall också se hur man kan beskriva linjer, cirklar, klot och plan med vektorer.

Denna text är första delen i en serie om linjär algebra. Den andra handlar om matriser och tar bland annat upp geometriska avbildningar, determinanten, linjärt beroende, egenvärden och egenvektorer. Den tredje texten tar upp abstrakta vektorrum och funktionsrum.

Efter några års användning och utveckling har denna text svällt upp och fått ett för stort innehåll. Det är inte meningsfullt att ägna så mycket kurstid åt att formulera ekvationen för linjer, cirklar, plan och klot på vektorform.

På grundläggande betygsnivå bör man (med lärarens vägledning) fokusera på följande punkter.

- Vektorer på komponentform. Studera algebran så att du kan räkna med vektorer, beräkna norm och normera vektorer. Detta tas upp i avsnitt 4.
- Skalärprodukten. Du skall kunna beräkna skalärprodukten mellan två vektorer och kunna tolka den geometriskt. Detta tas upp i avsnitt 5.
- Linjer på parameterform. Definitionen 6.1.1 är viktig. På grundläggande nivå kan du sen hoppa direkt till avsnitt 6.4 för att tillämpa detta vid beräkningar av skärningspunkten mellan två linjer.
- Cirklar. Hoppa direkt till avsnitt 7.3 för beräkning av skärningspunkt mellan linje och cirkel.
- Plan. Definitionen av plan på parameterform 8.2.1 är viktig även om den inte används i praktiken. Även i detta fall är uttrycken på komponentform i slutet av avsnitt 8.2.1 viktigare på grundläggande nivå än de på vektorform i början av avsnittet.
- Klot. Även här är parameterformen viktigast. Detta tas upp i avsnitt 8.3.1.

För djupare förståelse bör man studera de abstrakta uttrycken på vektorform som ges och dess grafiska tolkning. Detta gäller (6.1), (6.5), (7.2) samt uttrycken i sats 6.3.2 och avsnitt 8.2.3.

Om man är intresserad av att lära sig programmera är det effektivt att börja med att skriva program som simulerar rörelser. Där blandas matematik, fysik, programmering och datorgrafik på ett sätt som både är lärorikt och som stimulerar kreativiteten.

Vill man skriva ett lite mer avancerat program med objektorienterad design kan man implementera en vektorklass, inklussive aritemetik och skalärprodukt. Då kan man direkt skriva upp uttryck som (6.1), (6.5) och (7.2) för att få en väldigt kompakt och fin kod.

Tack till Roy Skjelnes, KTH, vars läromedel om matriser och linjär algebra har tjänat som inspiration till delar av denna text. Tack till alla elever som hjälpt till med korrekturläsning, speciellt Hampus Söderström, Sci11.

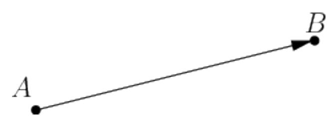
2 Notation

Här följer en sammanställning av notationen som används i denna text.

A	Punkten A. Punkter anges med versaler.
A_x	x-koordinaten för punkten A.
$\overline{AB}$	En vektor som ett geometriskt objekt, definierad från punkten A till B.
$\boldsymbol{v}$	En vektor som ett algebraiskt objekt anges med fet stil.
$\mathbf{0}$	Speciellt anges nollvektorn också med fet stil.
a	Skalärer anges med icke-fet stil.
v_x	$\hat{\boldsymbol{x}}$-komponenten av $\boldsymbol{v}$.
$\\|\boldsymbol{v}\\|$	Norm (storlek).
$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$	Skalärprodukt.

3 Vektorer som geometriska objekt

Som ett geometriskt objekt är en **vektor** mängden av alla lika långa och lika riktade sträckor. En vektor kan illustreras med en pil som alltså både har storlek (längd) och riktning. Om en riktade sträckan går från punkt A till punkt B skriver vi $\overline{AB}$ då vi menar motsvarande riktade sträcka.

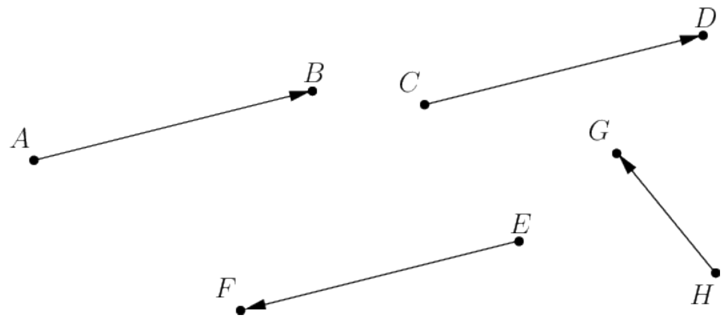


$\overline{AB}$ är bara en **representation** för denna vektor. De riktade sträckorna (pilarna) kan parallellförflyttas (flyttas utan att vridas) fritt, så länge de har samma längd och riktning anses de lika. I figuren nedan gäller $\overline{AB} = \overline{CD}$ eftersom de har samma längd och riktning, trots att pilarna inte befinner sig på samma ställe. Vi säger att $\overline{AB}$ och $\overline{CD}$ är olika representationer för samma vektor. Lite slarvigt kommer vi dock använda språkbruket att vi flyttar vektorer, då vi i själva verket menar att de riktade sträckorna flyttas.

Uppenbart gäller $\overline{AB} \neq \overline{GH}$, de har ju varken storlek eller riktning gemensam.

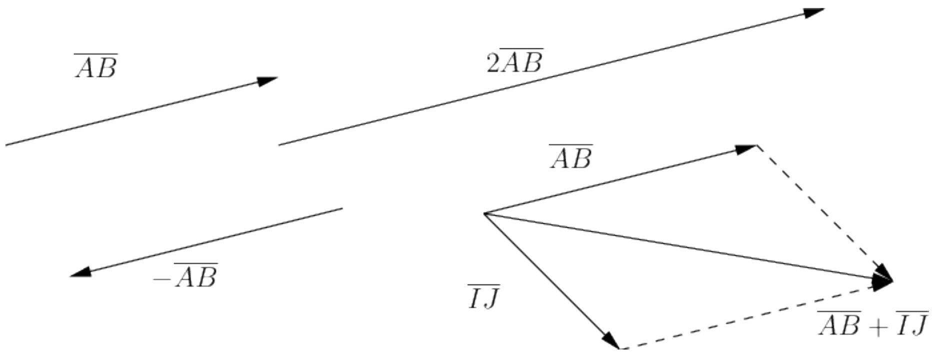
Observera att vektorn $\overline{AB}$ *inte* är lika med $\overline{EF}$ eftersom de är riktade åt olika håll. De har dock samma längd. Däremot gäller $\overline{AB} = -\overline{EF}$.

Begrunda att det alltid gäller att $\overline{PQ} = -\overline{QP}$.



Eftersom en vektor kan parallellförflyttas är punkterna som pilarna går mellan inte viktiga. De ritas från och med nu inte ut.

Vi kan införa en slags ”geometrisk algebra” enligt figurerna nedan.



Vi kan multiplicera en vektor med ett tal. Om talet är negativt byter vektorn håll. Att addera två vektorer med olika riktning görs genom att tänka sig ett parallellogram enligt figuren.

Storleken (längden) av en vektor $\overline{AB}$ tecknas $\|\overline{AB}\|$.

Fundera igenom följande mycket viktiga egenskaper så att de känns naturliga jämfört med hur vi brukar tänka på avstånd och längder mellan punkter.

- $\|\overline{AB}\| \geq 0$ med likhet endast om A och B är samma punkt. Då benämns $\overline{AB}$ ofta **nollvektorn**.
- $\|\overline{AB}\| = \|\overline{BA}\|$
- $\|k\overline{AB}\| = |k| \cdot \|\overline{BA}\|$, $k \in \mathbb{R}$
- $\|\overline{AB} + \overline{CD}\| \leq \|\overline{AB}\| + \|\overline{CD}\|$ (Denna olikhet kallas **triangelolikheten**.)

4 Vektorer på komponentform

4.1 En algebra på punkter

I denna text fördjupar vi oss inte i allmänna egenskaper för vektorrum, men i korthet är vektorer ett matematiskt objekt som man kan addera och multiplicera med tal.

Det enklaste [1] vektorrummet går att visualisera så att det fullständigt liknar mängden av alla punkter i ett plan, $\mathbb{R}^2$. Vi måste dock förtydliga vad som menas med att addera två punkter och vad som menas med att multiplicera dem med tal.

[1]Enklast ur ett pedagogiskt perspektiv.

Definition 4.1.1. En **vektor** i $\mathbb{R}^2$ är en punkt i $\mathbb{R}^2$, men vi skriver [2]

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

för att förtydliga att vi menar något mer än bara en punkt(v_x, v_y).

För alla vektorer $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{u}$ och alla tal $a, b \in \mathbb{R}$ definierar vi

$$\begin{aligned} a \cdot \boldsymbol{v} &= \begin{bmatrix} av_x \\ av_y \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} &= \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vidare benämner vi v_x och v_y **komponenter** till vektorn $\boldsymbol{v}$. ▲

Hela poängen med vektorer är att de kan adderas, och speciellt att man kan uttrycka en vektor med hjälp av andra vektorer. Det blir mer tydligt i texten *Abstrakta vektorer*.

Då en vektor $\boldsymbol{w}$ skrivs som summan av två (eller fler) andra vektorer på formen

$$\boldsymbol{w} = a\,\boldsymbol{v} + b\,\boldsymbol{u}$$

säger man att $\boldsymbol{w}$ är en **linjärkombination** av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.

Det vi i själva verket menar då vi skriver att en vektor $\boldsymbol{v}$ med sina komponenter som ovan är att $\boldsymbol{v}$ är en linjärkombination enligt

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = v_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorer som används för att beskriva andra vektorer benämns **basvektorer**, och tecknas ofta med en hatt ovanför. I $\mathbb{R}^2$ används ofta basen

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}} &\equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\boldsymbol{y}} &\equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Origo benämner vi **nollvektorn**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0},$$

vilken behövs för att göra en komplett algebraisk struktur.

Det är viktigt att förstå att det är skillnad mellan en vektor och dess komponenter. Det gäller även punkter och dess koordinater.

Samma vektor kan uttryckas med olika baser, precis som punkter kan uttryckas med olika koordinatsystem. Det blir mer om detta i texten om matriser.

Vad en vektor och ett vektorrum är rent axiomatiskt redovisas formellt i A.

Exempel 4.1.2.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

▲

[2]Skrivsättet får sin förklaring i texten om matriser.

Exempel 4.1.3.

$$-\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \equiv -1\cdot\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-5\end{bmatrix}$$

▲

Exempel 4.1.4.

$$\begin{bmatrix}-6\\4\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6\\-11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6+3\cdot 4-6\\4+3\cdot(-5)-(-11)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \equiv \mathbf{0}$$

▲

Definitionen ovan kan generaliseras till att gälla flera dimensioner på ett mycket naturligt sätt.

Definition 4.1.5. En **vektor** i $\mathbb{R}^n$ är punkt i $\mathbb{R}^n$ som vi skriver

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}.$$

Algebran definieras till

$$\begin{aligned}
a\cdot\boldsymbol{v} &= \begin{bmatrix}av_1\\av_2\\\vdots\\av_n\end{bmatrix}.\\
\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u} &= \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1+u_1\\v_2+u_1\\\vdots\\v_n+u_n\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

▲

Som du ser är $\mathbb{R}^2$ ett specialfall av $\mathbb{R}^n$. De flesta exempel i denna text kommer röra $\mathbb{R}^2$ efter som det helt enkelt räcker för att belysa vissa geometriska aspekter på vektorer. Ibland måste vi ta till $\mathbb{R}^3$ för att belysa något intressant.

Eftersom vektorer oftast visualiseras som pilar (som har en riktning) är det naturligt med följande definition.

Definition 4.1.6. Två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är **parallella** om det finns en skalär k så att $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$. ▲

Notera att definitionen ovan alltså inte bara gäller $\mathbb{R}^2$ utan generellt för vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Om det är uppenbart hur en definition skall generaliseras från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^n$ skriver vi bara ut den första versionen.

Definition 4.1.7. Normen (längden, storleken) av en vektor $\boldsymbol{v}$ är

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{4.1}$$

▲

Det finns också en verbform av detta begrepp. **Att normera** en vektor betyder att man multiplicerar den med ett tal så att dess norm blir 1. I själva verket måste vi dela den med dess norm.

Exempel 4.1.8. Normera vektorn $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Vi räknar ut $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{55}$. Då $\boldsymbol{v}$ normeras fås komponenterna

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{55} \\ 7/\sqrt{55} \end{bmatrix}.$$

▲

Normen används för att definiera avstånd mellan två vektorer.

Definition 4.1.9. Avståndet mellan två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ och ges av

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|. \tag{4.2}$$

▲

5 Skalärprodukt

5.1 Definitioner

Vi skall se att vi kommer att ha stor nytta av att reda ut om två vektorer i någon mening pekar åt samma håll eller inte. Vi vill gärna ha ett mått på detta. Speciellt viktigt kommer det vara att avgöra om två vektorer är ortogonala. Om de är det måste måttet vi är ute efter rimligen vara noll. För vektorer som pekar bort från varandra bör måttet vara negativt.

Vi gör följande definition.

Definition 5.1.1. Skalärprodukten mellan två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ har symbolen $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ och ges av

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \equiv u_x\, v_x + u_y\, v_y. \tag{5.1}$$

▲

Du undrar förmodligen över varför vi skriver den ena vektorn ”liggandes” (som en radvektor) och den andra vektorn ”ståendes” (som en kolumnvektor). Det är en högst berättigad fråga som får sitt svar då du studerar matriser [3]. Just nu får du vänja dig vid att man skriver såhär!

[3] I själva verket gäller $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \equiv \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}$.

Att detta begrepp benämns **skalär**produkt beror på att resultatet är en skalär, ett tal. Det finns också en **vektor**produkt [4] som resulterar i en vektor.

Skalärprodukten har de egenskaper vi var ute efter, men det syns inte uppenbart utom i vissa specialfall.

Följande definition ger en tolkning av vad som menas med skalärprodukt.

Definition 5.1.2. **Vinkeln** θ mellan två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ ges av

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|}. \tag{5.2}$$

▲

Om vi hade definierat vad som menas med en vinkel mellan två vektorer skulle vi kunnat använda definitionen ovan som definition av skalärprodukt.

Vi har tidigare nämnt att två vektorer kan vara ortogonala eller inte. Nu gör vi en precis definition av vad som menas med detta.

Definition 5.1.3. Två vektorer är **ortogonala** om deras skalärprodukt är noll. ▲

En viktig egenskap för skalärprodukten är att den är symmetrisk och linjär. Vi har följande sats.

Sats 5.1.4. *För alla vektorer* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *och* $\boldsymbol{w}$ *och* $a, b \in \mathbb{R}$ *gäller*

$$\begin{array}{rl} \textit{(positiv)} & \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0 \ \textit{ Med likhet endast om } \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \\ \textit{(symmetrisk)} & \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle, \\ \textit{(linjär)} & \langle a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = a \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + b \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle. \end{array}$$

Beviset för denna sats är i själva verket ett bevis för att $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ är en skalärprodukt [5].

5.2 Egenskaper och exempel

Vi skall nu se att skalärprodukten faktiskt har de egenskaper vi är ute efter.

Exempel 5.2.1. För två parallella vektorer riktade åt samma håll blir skalärprodukten helt enkelt produkten av vektorernas storlekar.

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 6$$

▲

Exempel 5.2.2. Om vektorerna är parallella men motriktade blir skalärprodukten också lika stor som produkten av vektorernas storlekar, men negativ.

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 = -12$$

▲

[4] På engelska benämner man ibland dessa produkter **dot** product respektive **cross** product efter hur räkneoperationen. Man skriver nämligen ibland $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ respektive $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. På svenska säger man **kryss**produkt om det senare. Ytterligare ett namn på skalärprodukten är **inre** produkt. Med lite god vilja kan man anse att vektorprodukten är ett specialfall av den **yttre** produkten, i alla fall i $\mathbb{R}^3$. Att reda ut detta i detalj kräver en hel del kunskaper om bland annat tensorer.

[5] Se texten Abstrakta Vektorrum.

Exempel 5.2.3. Två ortogonala vektorer får skalärprodukt noll.

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$$

▲

Exempel 5.2.4. Vinkeln mellan två vektorer $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ beräknas enligt följande exempel.

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 3^2}\sqrt{(-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \theta &\approx 63.4^\circ \end{aligned}$$

Notera att skalärprodukten i täljaren är positiv, vilket ger att vinkeln mellan vektorerna är mindre än 90°. ▲

Exempel 5.2.5. För alla vektorer $\boldsymbol{v}$ gäller

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{x}} \rangle &= v_x, \\ \langle \boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{y}} \rangle &= v_y. \end{aligned}$$

Speciellt gäller

$$\begin{aligned} \langle \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{x}} \rangle &= 1, \\ \langle \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{y}} \rangle &= 1, \\ \langle \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

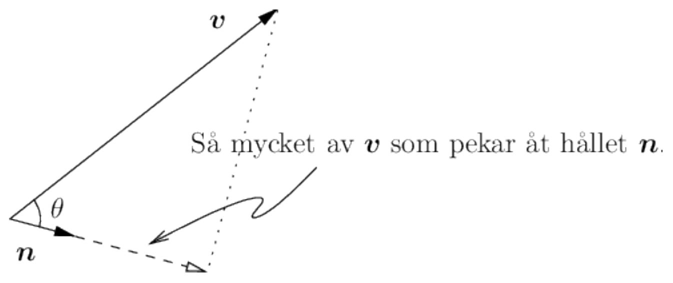
▲

Tolkningen av skalärprodukt som beskrivs nedan är det viktigaste och mest användbara sättet att förstå skalärprodukt!

Om $\boldsymbol{n}$ är normerad, $\|\boldsymbol{n}\| = 1$, gäller för alla vektorer $\boldsymbol{v}$ att

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle &= \text{"så mycket av } \boldsymbol{v} \text{ som pekar åt hållet } \boldsymbol{n}\text{"} \\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle &= \|\boldsymbol{v}\| \cdot 1 \cdot \cos(\theta) \end{aligned}$$

vilket illustreras i figuren nedan.



Du kan också tänka på skalärprodukten $\langle \hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{v} \rangle$ som $\hat{\boldsymbol{n}}$-komponenten av $\boldsymbol{v}$.

En annan viktig observation som används ofta är följande sats. (Den är mycket enkel, men för att kunna hänvisa till den nedan låter vi den ändå vara en sats.)

Sats 5.2.6.
$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = v_x^2 + v_y^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2.$$

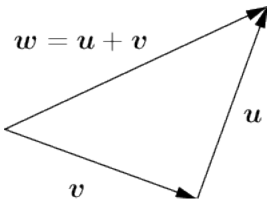
Axiomatiskt tas ofta detta som en definition av norm [6].

6 Linjer på vektorform

Vi skall nu se hur man kan definiera linjer på vektorform. Som det ofta är i matematiken kan vissa problem vara enkla i en representation men komplicerade i en annan och tvärt om. Till exempel gäller det vissa geometriska problem som blir väldigt olika i den Euklidiska geometrin jämfört med koordinatgeometrin.

Pythogoras sats är ett bra exempel. Givet tre punkter som utgör en rätvinklig triangel måste man i koordinatgeometrin teckna avståndet mellan punkterna, kvadrera dessa, bilda summan av de två kortaste och förenkla detta uttryck så att det blir lika med kvadraten av det största avståndet. I denna förenkling måste man använda att triangeln är rätvinklig. Algebran för detta problem är mycket omfattande.

Som vektorer kan vi tänka på sidorna i en triangel som vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$, där $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ vilket illustreras i figuren nedan.



Hela beviset för pythagoras sats blir då

$$\|\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + 2 \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

där vi utnyttjat satserna 5.2.6 (att teckna normen med skalärprodukten) och 5.1.4 (att skalärprodukten är linjär) samt att $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ om det är en rätvinklig triangel.

Om triangeln inte vore rätvinklig skulle vi förresten fått cosinussatsen för trianglar om vi använt definition 5.1.2 (definition av vinkel).

6.1 Parameterform

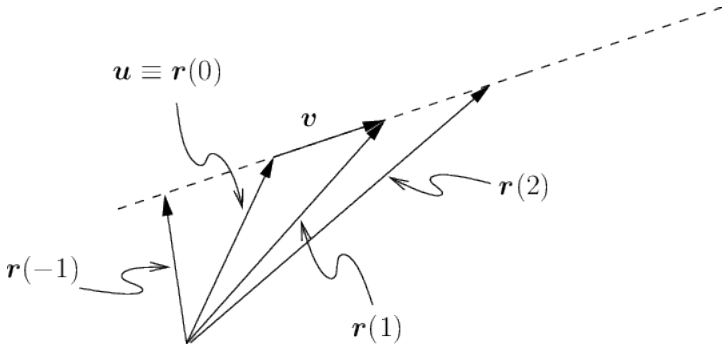
Två saker karakteriserar en linje: Den finns någonstans och den har en viss riktning. På vektorform är det naturligt att välja en punkt som ”startpunkt” och en vektor som ”strålar ut” från denna punkt i linjens riktning. Vi gör följande definition.

Definition 6.1.1. En **linje** är mängden av alla vektorer

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}t \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}$$

där $\boldsymbol{u}$ är en punkt [7] på linjen. Vektorn $\boldsymbol{v}$ benämns linjens **riktningsvektor**. ▲

[6] Se texten Abstrakta Vektorrum.
[7] Vi säger punkt men menar vektor. Rent axiomatiskt blandar vi inte in punkter i detta.



Jämför detta uttryck med en likformig rörelse. Vektorn $\boldsymbol{v}$ blir då hastighet, t tid, och $\boldsymbol{u}$ utgångspunkt (då $t = 0$). Flera problem vi skall studera snart har naturliga tolkningar som rörelser.

Om vi skriver ut komponenterna för en linje,

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix},$$

ser vi att detta är ett specialfall av att skriva en kurva på parameterform:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \end{bmatrix}$$

där $f_x(t)$ och $f_y(t)$ är funktioner.

Definition 6.1.2. Två linjer är **parallella** respektive **ortogonala** om detta gäller för linjernas riktningsvektorer. ▲

Vi noterar att en linje är en funktion av en variabel, och gör följande definition.

Definition 6.1.3. **Derivatan** av linjen $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}t$ är

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) \equiv \boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{v}.$$

▲

Tolkat som en rörelse får vi mycket naturligt att derivatan av positionen är hastigheten.

Detta är återigen ett naturligt specialfall av derivatan av en kurva på parameterform.

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) \equiv \boldsymbol{r}'(t) = \begin{bmatrix} f_x'(t) \\ f_y'(t) \end{bmatrix}.$$

Nu skall vi se hur man överför några kända problem på vektorform.

6.1.1 Skärningspunkten för två linjer

Låt $\boldsymbol{r}_1(t)$ och $\boldsymbol{r}_2(s)$ vara två linjer. Att de skär varandra betyder att det finns något par av s och t så att $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}_2(s)$. Vi får ekvationen

$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1 t = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2 s.$$

Vi får till synes en ekvation med två obekanta, men på komponentform får vi ett ekvationssystem med två ekvationer som har en lösning (ett par av s och t). Om linjerna är parallella kommer naturligtvis lösning att saknas.

6.1.2 Var på en linje ligger den punkt som är närmast en given punkt?

Antag att vi har en punkt $\boldsymbol{w}$ som inte tillhör en linje $\boldsymbol{r}(t)$. Avståndet D mellan en punkt på linjen och punkten $\boldsymbol{w}$ ges av $\|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{w}\|$. Vi vill alltså hitta den punkt på linjen som minimerar detta avstånd. Det är enklare att jobba med kvadraten av avståndet

$$\begin{aligned}
D^2(t) &= \|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 \\
&= \|t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})\|^2 \\
&= \langle t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}), t\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})\rangle \\
&= \langle t\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{v}\rangle + \langle t\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\rangle + \langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}, t\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\rangle \\
&= t^2\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + 2t\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\rangle + \langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\rangle .
\end{aligned}$$

Vi får ekvationen

$$\frac{d}{dt}D^2(t) = 2t\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle + 2\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\rangle = 0$$

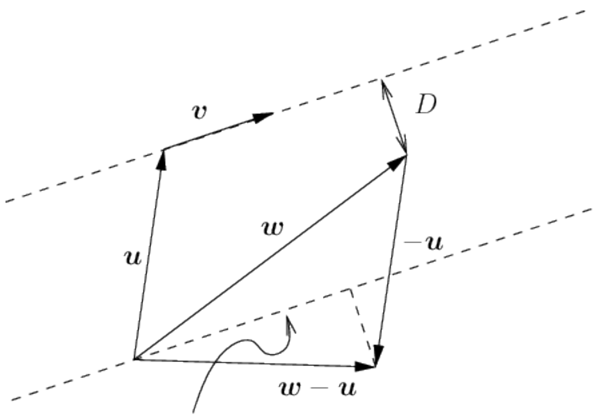
vars lösning är

$$t = -\frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\rangle}{\|\boldsymbol{v}\|^2}. \tag{6.1}$$

Innan vi går vidare skall vi analysera just detta uttryck något.

Om $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ blir t även avståndet mellan $\boldsymbol{u}$ och den punkt på linjen som är närmast $\boldsymbol{w}$.

Figuren nedan visar de inblandade vektorerna. Tänk på figuren som att $\|\boldsymbol{v}\| = 1$.



Så mycket av $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}$ pekar åt $\boldsymbol{v}$ om $\|\boldsymbol{v}\| = 1$.

I figuren syns att projektionen av $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$ är den sträcka som vi måste röra oss från $\boldsymbol{u}$ längs linjen för att komma till den punkt på linjen som är närmast $\boldsymbol{w}$. Det gäller bara rent geometriskt om $\|\boldsymbol{v}\| = 1$. Om så inte är fallet måste $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\rangle$ delas med $\|\boldsymbol{v}\|$ för att få "antalet $\boldsymbol{v}$" vi måste röra oss från $\boldsymbol{u}$. Detta ger att avståndet blir

$$\frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\rangle}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

Vi söker det värde på t så att $\|\boldsymbol{v}\|t$ blir precis så stort. Det ger ekvationen

$$\|\boldsymbol{v}\|t = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}\rangle}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

vars lösning naturligtvis är (6.1).

Nu går vi vidare med att bestämma den sökta punkten. Det fås genom att sätta in t från (6.1) i uttrycket för linjen. Vi får

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{u} + \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u} \rangle}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}.$$

En mer naturlig frågeställning att börja med vore ”Hur långt från en linje ligger en given punkt?”. Vi skall senare se att det uttryck vi i själva verket kommer att ha nytta av är (6.1).

6.2 Ekvationen för en linje

I koordinatgeometrin ges en linje av lösningsmängden till en ekvation av typen $ax + by + c = 0$. Man kan bilda ekvationen för en linje på vektorform också. På parameterform ges en linje av en punkt $\boldsymbol{u}$ och en riktningsvektor $\boldsymbol{v}$. Så när som på en konstant finns det en vektor $\boldsymbol{n}$ som är ortogonal mot $\boldsymbol{v}$, enligt definition 5.1.3 skall $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle = 0$ gälla.

Vi kan därför omdefiniera vad som menas med en linje.

Definition 6.2.1. En **linje** är alla vektorer $\boldsymbol{r}$ som är lösningen till en ekvation av typen $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u} \rangle = 0$ där $\boldsymbol{u}$ är en punkt på linjen och $\boldsymbol{n}$ är linjens **normal**. ▲

6.2.1 Jämförelse med koodinatgeometrin

Nu skall vi se hur ekvationen för en linje hänger ihop med ekvationen i koordinatgeometrin. Låt $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Då blir linjens ekvation på vektorform

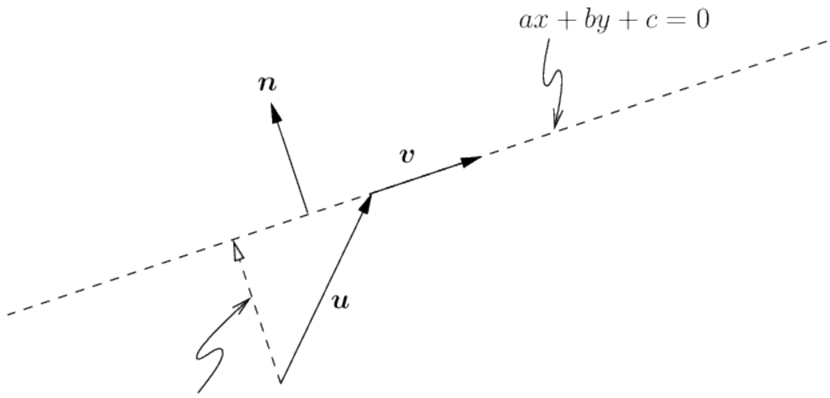
$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u} \rangle &= \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} \rangle - \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u} \rangle = \\
&= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \\
&= ax + by - (au_x + bu_y) = 0.
\end{aligned}$$

Eftersom $\boldsymbol{u}$ är en punkt på linjen måste $au_x + bu_y + c = 0$ gälla. Vi får

$$c = -(au_x + bu_y) = -\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u} \rangle . \tag{6.2}$$

Sätter vi in detta i uttrycket ovan får vi just $ax + by + c = 0$.

Vi kan nu skapa geometrisk mening åt talet c. Figuren nedan illustrerar detta. Tänk på $\boldsymbol{n}$ som om $\|\boldsymbol{n}\| = 1$.



(Så mycket av $\boldsymbol{u}$ pekar åt hållet $\boldsymbol{n}$) $=$ ($\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u} \rangle$ om $\|\boldsymbol{n}\| = 1$).

Vi såg ju ovan att $c = -\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u} \rangle$. I figuren visas att detta också är det kortaste avståndet mellan origo och linjen om $\|\boldsymbol{n}\| = 1$.

Ett avstånd är alltid positivt, så det riktiga avståndet är $|c|$. Vi har dock alltid friheten att välja riktning på linjens normal. Den behöver ju heller inte vara normerad ($\|\boldsymbol{n}\| = 1$ behöver ej gälla). Mer allmänt betyder alltså c ”antalet normaler vi måste förflytta oss *från* linjen (från den punkt där linjen är närmast origo) *till* origo”. Om normalen pekar mot origo från den punkten blir c positivt. (Se övning **??** och exemplet nedan.)

Exempel 6.2.2. Hur nära kommer linjen $5x - 3y + 18 = 0$ origo?

Lösning: Vi identifierar en normal $\boldsymbol{n}$ med komponenterna $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$. Uppenbart gäller inte $\|\boldsymbol{n}\| = 1$, varför vi måste ”normera linjens ekvation” så att dess normal blir normerad. Vi beräknar $\sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ och får ekvationen

$$\frac{5}{\sqrt{34}}x - \frac{3}{\sqrt{34}}y + \frac{18}{\sqrt{34}} = 0.$$

Denna ekvation har naturligtvis samma lösningsmängd som den givna. Vi identifierar alltså att det kortaste avståndet mellan origo och linjen är $\frac{18}{\sqrt{34}}$. ▲

Vi drar därför följande slutsatser.

1. Givet en linje $ax + by + c = 0$ kan vi utläsa den vektor som är normal till linjen: $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

2. Om a och b uppfyller $a^2 + b^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|\boldsymbol{n}\| = 1$ gäller att $|c|$ är avståndet mellan linjen och origo. Tecknet på c beror på om normalen pekar bort från eller mot origo.

6.2.2 Skärningspunkten för två linjer igen

Antag att vi har två linjer och vill veta var de skär varandra. Låt den ena ges på ekvationsform, $\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}_1 \rangle = 0$ och den andra på parameterform, $\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{u}_2 + t\boldsymbol{v}_2$.

Skärningspunkten fås då t antar det värde där uttrycket för den andra linjen uppfyller den första linjens ekvation. Vi får

$$\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{u}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_2 + t\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{u}_1 \rangle = 0 \tag{6.3}$$

Denna ekvation kan lösas med avseende på t. Vi får

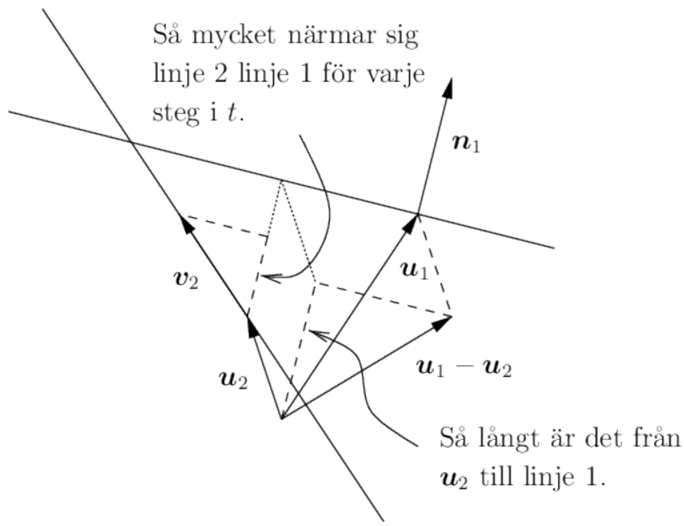
$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 \rangle + t \langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle &= 0 \\
t &= -\frac{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle} \\
t &= \frac{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle}. \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

Nu när vi känner t kan vi sätta in detta i $\boldsymbol{r}_2(t)$ för att räkna ut skärningspunkten. Vi får

$$\boldsymbol{u}_2 + \frac{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle} \boldsymbol{v}_2.$$

Jämför detta sätt att formulera problemet med exempel 6.1.1. Där fick vi två obekanta, men här bara en.

Uttrycket (6.4) går att tolka geometriskt, vilket visas i figuren nedan.



Linjerna ritade med punkter finns för att underlätta insikten om att två parallellogram bildas och att $\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \rangle$ är avståndet mellan linje 2 och linje 1 från $\boldsymbol{u}_2$.

För att $\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \rangle$ och $\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ överensstämma med avstånden i bilden måste $\boldsymbol{n}_1$ vara normerad. Det har dock ingen betydelse för uttrycket (6.4) vilket inses genom att skriva ut normeringsfaktorn $\|\boldsymbol{n}_1\|$ i både täljare och nämnare,

$$t = \frac{\dfrac{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{n}_1\|}}{\dfrac{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{n}_1\|}}.$$

Tolkat som en rörelse blir lösningen t ovan svaret på frågan ”Hur lång tid tar det att komma fram till linje 1 från $\boldsymbol{u}_2$ då hastigheten är $\boldsymbol{v}_2$?”.

6.3 Viktiga satser

6.3.1 Reflektioner

Följande sats kan fysikaliskt handla om studsar av olika slag, speciellt en ljusstråle som reflekteras i en punkt på en yta.

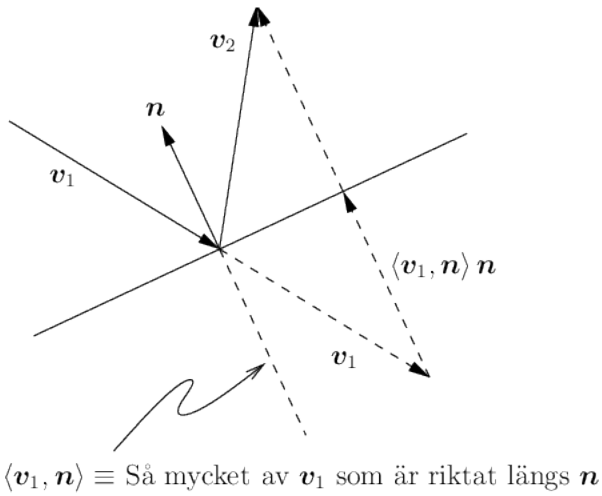
Sats 6.3.1. *Om en stråle med riktningsvektor* $\boldsymbol{v}_1$ *infaller mot en yta där den reflekteras, har den utgående strålen riktning* $\boldsymbol{v_2}$*. Sambandet mellan* $\boldsymbol{v}_1$ *och* $\boldsymbol{v}_2$ *ges av*

$$\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v}_1 - 2\frac{\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v_1} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} \tag{6.5}$$

där $\boldsymbol{n}$ *är normalen till ytan i reflektionspunkten.*

Bevis. **Geometrisk motivering**

Figuren visar de inblandade vektorerna i fallet då $\|\boldsymbol{n}\| = 1$. Den skall tolkas så att vektorn $\boldsymbol{v}_1$ flyttas framåt så att den pekar in från ytan i reflektionspunkten.



Skalärprodukten $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{n} \rangle$ anger hur mycket av $\boldsymbol{v}_1$ som pekar längs $\boldsymbol{n}$ om $\|\boldsymbol{n}\| = 1$.

Från spetsen på den framåtflyttade $\boldsymbol{v}_1$ skall två gånger förflytta oss en sträcka som är $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{n} \rangle$ lång i riktningen $\boldsymbol{n}$. En gång för att komma till ytan och en gång till för att komma till den eftersökta $\boldsymbol{v}_2$.

Minustecknet i uttrycket kommer sig av att $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{n}$ pekar åt olika håll. Därför blir $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{n} \rangle < 0$, vilket kompenserar för minustecknet i uttrycket.

Denna härledning gäller alltså fallet då $\boldsymbol{n}$ pekar *ut* från ytan sett från där $\boldsymbol{v}_1$ kommer ifrån.

Om $\|\boldsymbol{n}\|$ inte är 1, måste vi dividera både $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{n} \rangle$ och $\boldsymbol{n}$ med $\|\boldsymbol{n}\|$ för att konstruktionen skall gå ihop. Därför fås

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 - 2\frac{\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v_1} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n}.$$

Bevis

Beviset lämnas som övning.

□

6.3.2 Avstånd mellan linjer och punkter

Vi vet redan att den konstanta termen i ekvationen för en linje är relaterat till avståndet mellan linjen och origo. Detta avhandlades i avsnitt 6.2.1. Nu kan vi bevisa följande sats, som är relaterat till detta.

Sats 6.3.2. *Kortaste avståndet D mellan linjen $ax + by + c = 0$ och punkten P ges av*

$$D = \frac{|a\,P_x + b\,P_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Bevis. Vi låter punkten P ges av vektorn $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} P_x & P_y \end{bmatrix}^T$. Den linje som har sin utgångspunkt i denna punkt, och som är ortogonal mot vår givna linje, har riktningsvektor $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$. Om vi låter vår skärningspunkten mellan denna linje och den givna vara $\boldsymbol{u}_1$ kan vi skriva vår givna linjen på vektorform som

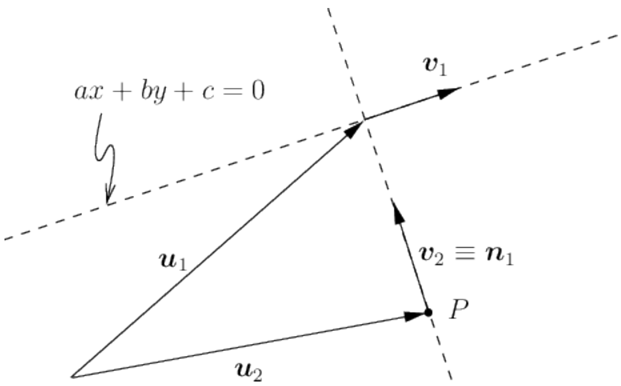
$$\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}_1 \rangle = 0$$

där $\boldsymbol{n}_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$. Observera att $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{n}_1$ alltså gäller.

Nu har vi givit alla inblandade vektorer namn som stämmer med situationen i avsnitt 6.2.2, se också figuren nedan. Avståndet D ges av

$$D = |t|\,\|\boldsymbol{v}_2\|$$

för det värde på t som ges av 6.4.



Vi får

$$\begin{aligned} t &= \frac{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle} \\ &= \frac{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle} \\ &= \frac{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle - \langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2} \\ &= \frac{a\,P_x + b\,P_y + c}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2} \end{aligned}$$

där 6.2 har använts i sista steget.

Sätter vi in detta i uttrycket ovan för D, samt använder $\|\boldsymbol{v}_2\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ fås

$$D = \frac{|a\,P_x + b\,P_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

Om man sätter in origo som P fås resultatet i avsnitt 6.2.1.

6.4 Beräkningar i praktiken

Uttryck som ekvation 6.3 och dess lösning 6.4 är snygga uttryck eftersom de är så generella. Att förstå uttryckens olika delar är en viktig bit av den djupare förståelse för denna del av den linjära algebran. Det samma gäller uttrycket 6.5.

I praktiken är det svårt att använda sig av uttrycken. Söker man en lösning måste man förr eller senare ned på komponentnivå då man sätter in siffror. Uttrycken är egentligen bara användbara i den form de står om man skrivit ett datorprogram där det finns en vektorklass där vektoralgebran och skalärprodukten är implementerad. Det är i sig en bra övning i programmering, men det ligger utanför målet med denna text.

Om man i någon tillämpning har något som rör sig, antingen ett fysiskt föremål med massa som har en hastighet eller en ljusstråle, och man vill veta var denna når fram till en vägg, är det praktiskt att representera strålen på parameterform och väggen som en ekvation.

I två dimensioner är väggen förstås en linje, men vi ska senare generalisera detta till tre (eller fler!) dimensioner, och då blir väggen ett plan.

Man måste inte krångla till problemet genom att skriva väggens ekvation på vektorform. I två dimensioner är ekvationen för en linje

$$ax + by + c = 0.$$

Linjen som vi vill ska skära denna linje har uttrycket

$$\begin{aligned} x(t) &= u_x + v_x\, t \\ y(t) &= u_y + v_y\, t \end{aligned}$$

på komponentform.

Sätter vi in denna i linjens ekvation får vi helt enkelt

$$a\,(u_x + v_x\, t) + b\,(u_y + v_y\, t) + c = 0$$

vilket är en mycket enkel ekvation att lösa.

Lösningen är

$$t = -\frac{c + a\,u_x + b\,u_y}{a\,v_x + b\,v_y}. \tag{6.6}$$

Det är bra om du övertygar dig om att 6.4 och 6.6 i själva verket är samma uttryck.

7 Cirkeln på vektorform

7.1 Parameterform

En cirkel kan skrivas på parameterform som mängden av alla vektorer

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + R\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix} \quad \forall \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Tangenten till cirkeln i en punkt ges av derivatan för detta uttryck.

7.2 Ekvationen för en cirkel

Formulerat som en ekvation tar vi fasta på att en cirkel är mängden av alla punkter som har samma avstånd till en viss punkt.

Definition 7.2.1. En **cirkel** är lösningsmängden till en ekvation av typen

$$\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\| = R$$

där R är cirkelns **radie** och $\boldsymbol{r}_0$ är cirkelns **medelpunkt**. ▲

Ett viktigt sambans som är användbart sammanfattas i följande sats.

Sats 7.2.2. *Om $\boldsymbol{r}$ är en punkt på en cirkel $\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\| = R$ så är $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ normal till cirkeln i denna punkt.*

7.2.1 Skärningspunkterna för en linje och en cirkel

En linje ges av $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1\, t$. Skärningspunkterna för linjen och en cirkel $\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\| = R$ ges av lösningarna till ekvationen

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{r}_0\| &= R \\ \|\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1\, t - \boldsymbol{r}_0\| &= R. \end{aligned} \tag{7.1}$$

På komponentform blir detta en andragradsekvation som har två lösningar om linjen passerar genom cirkeln, en lösning om linjen tangerar cirkeln och ingen lösning om linjen inte skär cirkeln.

Precis som i avsnitt 6.2.2 skall vi nu se hur lösningen av (7.1) går att tolka geometriskt. På komponentform blir det som sagt en andragradsekvation, vilket vi kan få även här enligt följande steg:

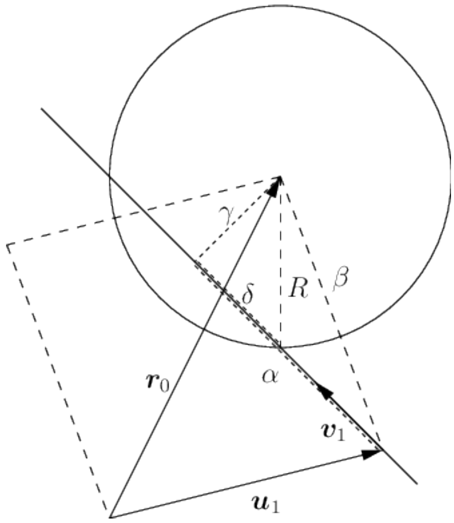
$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1 t - \boldsymbol{r}_0\|^2 - R^2 &= 0 \\ \langle \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{v_1}\,\boldsymbol{t} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{v_1}\,\boldsymbol{t} - \boldsymbol{r_0}\rangle - R^2 &= 0 \\ t^2\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}\rangle + 2t\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle + \langle \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle - R^2 &= 0 \\ t^2 + t\frac{2\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle}{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}\rangle} + \frac{\langle \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle - R^2}{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}\rangle} &= 0 \end{aligned}$$

ny text här

$$\begin{aligned} t &= -\frac{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle}{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}\rangle} \pm \sqrt{\left(\frac{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle}{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}\rangle}\right)^2 - \frac{\langle \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle - R^2}{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}\rangle}} \\ t &= -\frac{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\right)^2 - \frac{\langle \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle - R^2}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}} \\ \|\boldsymbol{v}_1\|\, t &= -\frac{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|} \pm \sqrt{\left(\frac{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\right)^2 - \langle \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}\rangle + R^2} \end{aligned} \tag{7.2}$$

I de två sista stegen har $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}\rangle = \|\boldsymbol{v}_1\|^2$ nyttjats, och en faktor $\|\boldsymbol{v}_1\|$ har flyttats till vänsterledet eftersom $\|\boldsymbol{v}_1\|\, t$ är sträckan från $\boldsymbol{u}_1$ till skärningspunkterna (en sträcka för varje t).

De olika delarna i (7.2) går att tolka geometriskt.



I figuren representerar α projektionen av $\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{u}_1$ på $\boldsymbol{v}_1$ (observera ordningen så att tecknet blir rätt nedan). Vidare är β längden av $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{r}_0$. Parallellogrammet där $\boldsymbol{r}_0$ är diagonal är införd för att detta skall framgå tydligare.

Den streckade linje vars längd är γ är vinkelrät mot linjen $\boldsymbol{r}_1(t)$. Linjens skärningspunkter med cirkeln är alltså på avståndet $\alpha \pm \delta$ från $\boldsymbol{u}_1$.

Med symboler gäller

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0} \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|} \\ \beta^2 &= \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{r}_0\|^2 = \langle \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{r_0} \rangle . \end{aligned}$$

Uttrycket för t ovan går nu att skriva

$$\|\boldsymbol{v}_1\|\, t = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + R^2}.$$

Det finns två rätvinkliga trianglar i figuren som låter oss teckna utttycken

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 - \gamma^2 \\ R^2 &= \delta^2 + \gamma^2 \end{aligned}$$

Med dessa fås

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{v}_1\|\, t &= \alpha \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma^2 - \beta^2 + \delta^2 + \gamma^2} \\ \|\boldsymbol{v}_1\|\, t &= \alpha \pm \delta \end{aligned}$$

vilket är precis vad vi ville visa.

7.3 Beräkningar i praktiken

Vektorversionen av cirkelns ekvation vacker men inte så användbar. Vill man beräkna skärningspunkten mellan en cirkel och en linje kan det vara enklare att gå ned på komponentform direkt istället för att avnända (7.2).

Cirkelns ekvation ges av

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

och i den sätter vi in linjen

$$\begin{aligned} x(t) &= u_x + v_x\,t \\ y(t) &= u_y + v_y\,t \end{aligned}$$

som vi vill skall skära cirkeln. Då fås

$$(u_x + v_x\,t - x_0)^2 + (u_y + v_y\,t - y_0)^2 = r^2$$

vilken är en andragradsekvation i t.

De två lösningar som kan fås är de värden på t där linjen går in och ut ur cirkeln sett från linjens utgångspunkt (språkbruket är förstås mest relevant då cirkeln befinner sig ”framför” linjens utgångspunkt, för då blir båda lösningarna positiva).

Om linjen tangerar cirkeln fås en lösning, och om linjen missar cirkeln fås inga lösningar.

8 Vektorer i tre dimensioner, plan och klot

I koordinatgeometrin definierade vi plan och klot som lösningar till ekvationer av typen

$$ax + by + cz + d = 0$$

respektive

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Vi skall nu se hur man kan definiera motsvarande begrepp med vektorer samt hur de olika definitionerna hänger ihop.

Vi övergår nu alltså till att studera vektorer i $\mathbb{R}^3$. Här har naturligtvis alla vektorer tre komponenter. Algebran för vektorer i $\mathbb{R}^3$ är densamma som för vektorer i $\mathbb{R}^2$. Linjer definieras också på samma sätt. Skalärprodukten får också den naturliga utvidgningen

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

8.1 Vektorprodukt

En sak man kan göra i $\mathbb{R}^3$ som man inte kan göra i $\mathbb{R}^2$ är att multiplicera två vektorer så att resultatet blir en vektor.

Definition 8.1.1. **Vektorprodukten** mellan vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ ges av

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$$

▲

Vi går inte in på hur eller varför denna definition ser ut som den gör, men några egenskaper är viktiga.

1. Vektorprodukten är *antisymmetrisk*, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$

2. Vektorprodukten av två parallella vektorer är noll. (Detta följer av punkt 1.)

3. Resultatet är ortogonal mot *både* $\boldsymbol{u}$ *och* $\boldsymbol{v}$.

4. Storleken av resultatet blir lika med ”arean” [8] av det parallellogram som har $\boldsymbol{u}$ respektive $\boldsymbol{v}$ som sidor.

Det finns många tillämpningar av begreppet vektorprodukt. I kursen Fysik 2 studeras exempelvis fall där en laddad partikel (laddning q) rör sig (fart v) i ett magnetfält (fältstyrka B). Eftersom begreppet vektorprodukt inte är förkunskaper i Fysik 2 studeras bara fall där hastigheten är vinkelrät mot magnetfältet. Då blir kraftens storlek

$$F = q\,v\,B$$

vilket är ett specialfall av det allmänna fallet

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$$

8.2 Plan

Precis som linjer kan plan parametriseras. Den mest fundamentala skillnaden mellan en linje och ett plan är att den topologiska dimensionen är två för planet, men bara ett för linjen. Det krävs också två riktningsvektorer för att definiera ett plan på parameterform.

Definition 8.2.1. Ett **plan** är mängden av alla vektorer

$$\boldsymbol{r}(s,t) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}s + \boldsymbol{w}t \ \ \forall \ \ s,t \in \mathbb{R}$$

där $\boldsymbol{u}$ är en punkt på planet. Vi säger att $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ **spänner upp** planet. ▲

Vi skulle nu kunna studera problem av typen ”Var skär en given linje ett plan?” eller ”Längs vilken linje skär två plan varandra?”. Precis som i exempel 6.1.1 får vi då en ekvation med flera obekanta som ändå går att lösa eftersom vi har flera dimensioner och därmed i praktiken har flera ekvationer.

Lite enklare blir det om vi bildar ekvationen för ett plan.

Definition 8.2.2. Ett **plan** är mängden av alla vektorer $\boldsymbol{r}$ rsom är lösningen till en ekvation av typen $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u} \rangle = 0$ där $\boldsymbol{u}$ är en punkt på planet och $\boldsymbol{n}$ är planets **normal**. ▲

Notera att detta är formulerat på samma sätt som ekvationsdefinitionen av en linje. Den enda skillnaden är att vektorerna nu är i $\mathbb{R}^3$ och inte $\mathbb{R}^2$.

Den geometriska förståelsen är också densamma: Vi söker mängden av alla vektorer som är ortogonala mot planets normal $\boldsymbol{n}$. Om origo (vektorn $\boldsymbol{0}$) tillhör planet skulle vi få ekvationen $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} \rangle = 0$, och om planet är ”flyttat” från origo till $\boldsymbol{u}$ får vi $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u} \rangle = 0$.

Definition 8.2.3. Två plan är **parallella** eller **ortogonala** om deras normaler är parallella eller ortogonala. ▲

De vektorer som spänner upp planet, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$, är båda vinkelräta mot planets normall $\boldsymbol{n}$. Därför är $\boldsymbol{n}$ parallell mot $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$.

[8] Detta tas i själva verket som defintion av area i vissa sammanhang.

8.2.1 Skärningspunkten för en linje och ett plan

Antag att vi känner ekvationen för ett plan, $\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}_1 \rangle = 0$ och har en linje på parameterform, $r(t) = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2 t$ och vill bestämma i vilken punkt linjen skär planet. Vi substituerar $\boldsymbol{r}$ i planets ekvation mot linjen och får

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{u}_1 \rangle &= 0 \\
\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2 t - \boldsymbol{u}_1 \rangle &= 0 \\
\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \, t &= 0 \\
t &= -\frac{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle}.
\end{aligned}$$

Notera återigen att detta exempel är helt ekvivalent med exempel 6.2.2.

Detta visar på styrkan i den abstrakta notationen, men i praktiken kan det vara bättre att gå ned på komponentform. Om vi gör som i avsnitt 6.4 får vi ekvationen

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

för planet och för linjens komponenter

$$\begin{aligned}
x(t) &= u_x + v_x\, t \\
y(t) &= u_y + v_y\, t \\
z(t) &= u_z + v_z\, t.
\end{aligned}$$

sätter vi in linjens komponenter i ekvationen för planet och löser detta får vi

$$t = -\frac{d + a\,u_x + b\,u_y + c\,u_z}{a\,v_x + b\,v_y + c\,v_z}$$

precis som väntat.

8.2.2 Skärningen mellan två plan

Att bestämma var två plan skär varandra kan göras på olika sätt beroende på förutsättningarna. Lösningen måste vara en linje om planen inte är parallella.

Om man skriver det ena planet på ekvationsform och den andra på parameterform kan man hitta ett förhållande mellan de två parametrarna så att man bara får en obekant parameter kvar. Denna parameter kommer då att parametrisera skärningslinjen.

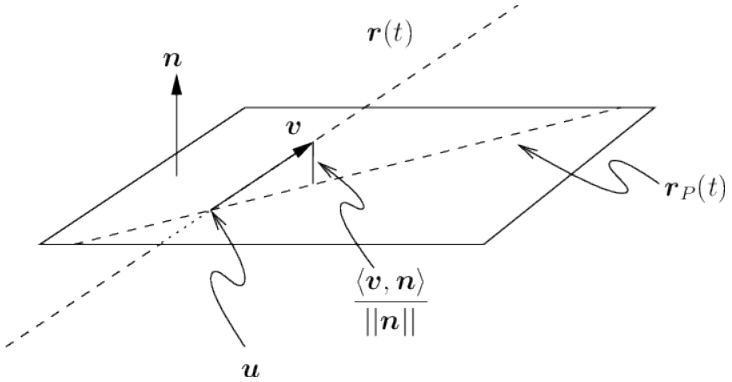
Intressantare blir det om man känner ekvationen för båda planen, men vi återkommer till detta fall i texten om matriser.

Man kan också utnyttja att skärningslinjens riktningsvektor måste vara ortogonal mot *båda* planens normaler. En sådan vektor fås om man bildar vektorprodukten mellan normalerna. Dessutom måste man känna till *en* punkt som är gemensam för båda planen som kan väljas till skärningslinjens utgångspunkt.

Vi väntar dock med att avhandla detta problem till dess vi tagit upp begreppet matriser, i del II av denna lilla serie.

8.2.3 Projektion av en linje på ett plan

Ett intressant problem är att projicera en linje på ett plan. Mer precis, givet en linje och ett plan, hitta ett uttryck för linjens projektion på planet.



Vi låter den ursprungliga linjen ges av $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}t$ där $\boldsymbol{u}$ ligger i planet (man kan alltid hitta $\boldsymbol{u}$ enligt exempel 8.2.1).

Den del av $\boldsymbol{v}$ som är riktad längs planets normal $\boldsymbol{n}$ är

$$\frac{\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}\rangle}{||\boldsymbol{n}||}\frac{\boldsymbol{n}}{||\boldsymbol{n}||}.$$

I figuren ovan är det markerat *hur stor del* av $\boldsymbol{v}$ som är riktad längs $\boldsymbol{n}$. För att få med *riktningen* av denna sträcka finns den andra faktorn.

Denna del av $\boldsymbol{v}$ måste subtraheras från $\boldsymbol{v}$ för att "komma ned på planet". Den projicerade linjen får då uttrycket

$$\boldsymbol{r}_P(t) = \boldsymbol{u} - \left(\boldsymbol{v} - \frac{\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}\rangle}{||\boldsymbol{n}||^2}\boldsymbol{n}\right)t.$$

På komponentform blir x-komponenten av detta uttryck

$$r_{x\,P}(t) = u_x - \left(v_x - \frac{n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} n_x\right)t.$$

Uttrycken för $r_{y\,P}(t)$ och $r_{z\,P}(t)$ liknar detta.

Kruxet är att alla komponenter av $\boldsymbol{r}$ kommer att innehålla alla komponenter av $\boldsymbol{v}$. Vi återkommer till detta i texten om matriser.

8.3 Klot

Allt som är sagt om cirklar gäller även för klot (utom parametriseringen), se avsnitt 7.2.

Även ett klot är mängden av alla punkter som har samma avstånd till en viss punkt.

Definition 8.3.1. En **klot** är lösningsmängden till en akvation av typen

$$\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\| = R$$

där R är klotets **radie** och $\boldsymbol{r}_0$ är cirkelns **medelpunkt**. ▲

Även för klot gäller följande sats.

Sats 8.3.2. *Om $\boldsymbol{r}$ är en punkt på ett klot $\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\| = R$ så är $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ normal till klotet i denna punkt.*

8.3.1 Skärningspunkterna för en linje och ett klot

En linje ges av $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}t$. Skärningspunkterna för linjen och ett klot $\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\| = R$ ges av lösningarna till ekvationen

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0\| &= R \\ \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}t - \boldsymbol{r}_0\| &= R. \end{aligned}$$

Detta är samma ekvation som när vi sökte skärningspunkten mellan en linje och en cirkel, och lösningen ges även här av (7.2). Återigen ser vi styrkan och skönheten i de abstrakta vektor-uttrycken, men i praktiken kan det vara lättare att gå ned på komponentform direkt.

Klotet ges av ekvationen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

och i den sätter vi in linjen

$$\begin{aligned} x(t) &= u_x + v_x\, t \\ y(t) &= u_y + v_y\, t \\ z(t) &= u_z + v_z\, t \end{aligned}$$

och får

$$(u_x + v_x\, t - x_0)^2 + (u_y + v_y\, t - y_0)^2(u_z + v_z\, t - z_0) = r^2$$

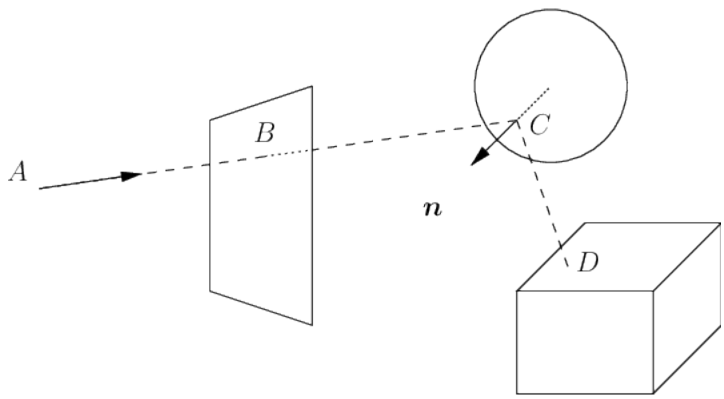
vilken är en andragradsekvation i t, precis som i det tvådimensionella fallet.

Avslutningsvis kan vi notera att sats 6.3.1 gäller även i $\mathbb{R}^3$.

8.4 Ray tracing

En tillämpning av allt detta finns inom datorgrafiken, speciellt inom en metod som heter *Ray Tracing*. Den går till så att man definierar en punkt som öga (punkt A i figuren nedan). Man definierar också en rektangel som man delar in i lika många punkter som önskad upplösning på bilden. För varje punkt bildar man en linje så går från ögat genom bildrektangeln.

Man bestämmer också var det finns olika sorters objekt och deras egenskaper. Exemplet nedan visar ett klot, som vi låter ha en yta som reflekterar 75% av det ljus som träffar den. Det finns också en kub som inte har en reflekterande yta.



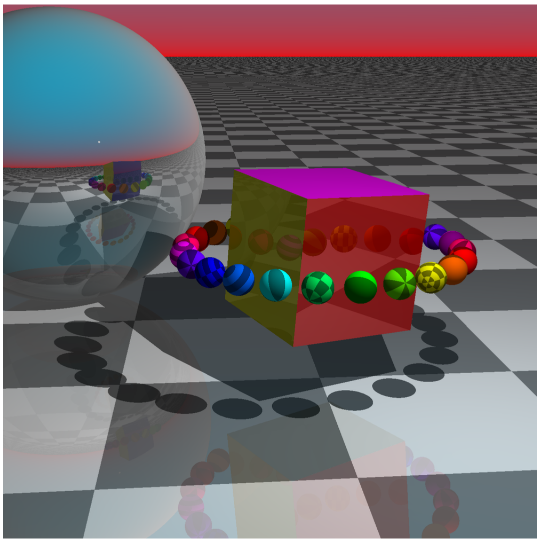
Man undersöker om linjen som utgår från A och går genom B i bilden träffar något objekt. Det går till så att man beräknar eventuella skärningspunkter mellan linjen och alla objekt man har. I exemplet träffar linjen klotet i punkt C. I denna punkt används sats 6.3.1 för att beräkna en ny linje som utgår från C och som har den nya riktningsvektorn.

Nu måste processen upprepas. Man beräknar eventuella skärningspunkter mellan denna nya linje och alla objekt man har. I exemplet träffar linjen kuben i punkt D. Eftersom kuben inte reflekterar ljus slutar strålen här. Färgen i punkt B kommer nu ges till 75% av klotets färg och 25% av kubens färg.

Detta upprepas för alla punkter i bilden.

För att få en finare bild bör man även blanda in ljuskällor. Antag att punkt C inte ligger i skugga. Då kommer klotets färg just där påverkas av vinkeln mellan normalen $\boldsymbol{n}$ och riktningen till ljuskällan sett från C.

Ett exempel på en bild som är genererad med denna teknik visas nedan.



A Axiom för vektorrum

Ett *vektorrum* (eng vector space) består av en kropp K och en mängd $\mathcal{V}$ där det finns en operation (addition, $+$) definierad på elementen i $\mathcal{V}$ och en operation (multiplikation, $\cdot$) definierad på element i K och elementen i $\mathcal{V}$.

Element i $\mathcal{V}$ benämns *vektorer* och betecknas med fet stil. Element i K benämns *skalärer*.

Vi säger att vektorrummet $\mathcal{V}$ är *över* K.

Axiom Följande punkter skall gälla för alla $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$ och för alla $k, l \in K$.

1. Addition är kommutativ: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
2. Addition är associativ: $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
3. Existens av nollvektorn:

   Det finns ett element $\mathbf{0}$ så att $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$
4. Existens av invers:

   Till varje $\boldsymbol{v}$ finns ett element $\boldsymbol{u}$ så att $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$
5. Multiplikation med skalär är distributiv: $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$
6. Multiplikation med skalär är associativ: $k(l\boldsymbol{v}) = (kl)\boldsymbol{v}$
7. Multiplikation med multiplikativt enhetselement i K: $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Exempel på vektorrum är $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ vilka alla är vektorrum över sig själva. Dessa ger på ett naturligt sätt även vektorrummen $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$.

Däremot är inte $\mathbb{Z}$ ett vektorrum över sig själv eftersom $\mathbb{Z}$ inte är en kropp.

Abstrakta exempel är funktionsrum. Mängden av alla polynom över en kropp är vektorrum över den kroppen. Exempelvis är $\mathbb{Q}[x]$ ett vektorrum över $\mathbb{Q}$.