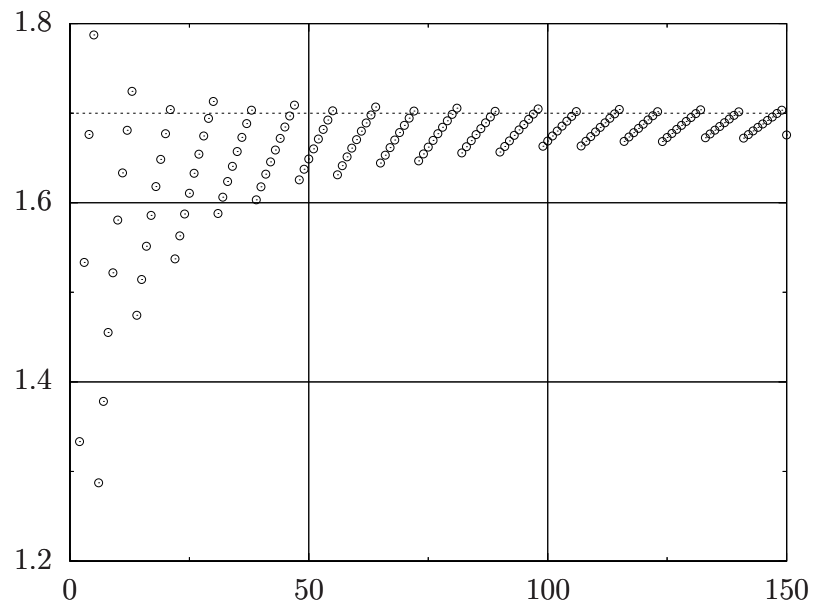




TALFÖLJDER OCH DIFFERENSEKVATIONER

JOHAN WILD

2020-12-10

©Johan Wild 2015

`johan.wild@europaskolan.se`

Får gärna användas i undervisning, kontakta i så fall författaren.

2020-12-10

Innehåll

1	Bakgrund	4
2	Inledning	4
3	Aritmetiska talföljder	5
4	Geometrisk talföljder	5
5	Uttryck för summor	6
6	Konvergens av talföljder	6
7	Serier	7
8	Betingat konvergenta serier	8
9	Differensekvationer	9
9.1	Inledning och enkla fall	9
9.2	Inhomogena fallet	10
9.3	Andra ordningen	13
9.4	Exponentialfunktioner i högerledet	17
9.5	Övningar	18
10	Beräkningar av summor	19
11	Tillämpningar	20
11.1	Exempel från Matematik 1c i nytt ljus	20
11.2	Jämvikter vid diskreta förändringar	23
12	Samband med differentialekvationer	26
12.1	Ordning ett	26
12.2	Ordning två	27
12.3	Sammanfattning	28

1 Bakgrund

Kursen Matematik 5 skall bland annat handla om differentialekvationer och numeriska lösningar av dessa samt om talteori, talföljder och rekursion. Normala läromedel tar upp delar av detta, men endast i spridda skurar. Denna text syftar till att knyta samman dessa delar av matematiken för en djupare förståelse.

Det finns också typiska problem man förväntas behärska efter att ha gått Matematik 5, men det är inte alltid lösningsmetoderna framgår så bra i alla läromedel. Det andra syftet med denna text är att ge konkreta instruktioner för hur man tolkar dessa frågeställningar, hur man löser problemen och hur lösningarna skall tolkas.

Denna text riktar sig alltså **både** till de som söker djupare förståelse **och** de som vill lära sig hur man löser standardproblemen effektivt.

De delar av teorin som täcks någorlunda bra av normala läromedel skrivs förbigående för att skapa en enhetlig text.

2 Inledning

En **talföljd** är en ordnad följd av tal. Samma tal får förekomma flera gånger. Som notation använder vi (a_n) som en förkortning för $(a_1, a_2, a_3, \dots)$. Observera att vi använder parenteser för att understryka att ordningen är viktig, vilket skiljer en talföljd från en mängd tal. I en mängd räknas också bara unika element.

Notera att a_n står för det n :te talet i talföljden, medan (a_n) står för hela talföljden.

Lägg även märke till att vi indexerar följderna från 1. Följden börjar med a_1 och inte med a_0 !

Generellt finns alltså inga krav på talen i en talföljd för att följderna skall få kallas talföljd.

Ibland är det praktiskt att avgränsa sig till ändliga talföljder, och i andra sammanhang är alla talföljder oändliga. En till synes ändlig talföljd tolkas i så fall som om den slutar med en oändlig följd nollor.

Om det är uppenbart kan vi ange en talföljd genom att beskriva några av elementen. Exempelvis kan vi bilda talföljden $(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ där det alltså anses uppenbart att $a_6 = 11$.

Väldigt ofta måste man ange vilka tal som finns i en följd på andra sätt. Det mest naturliga är att bilda ett **uttryck** för a_n i stil med $a_n = n^2 - 3n$. Detta ger följderna $(a_n) = (-2, -2, 0, 4, 10, 18, \dots)$.

Ett annat sätt att ange vilka tal som finns i en talföljd är att ange hur ett nytt tal bildas från de föregående. Då måste man också ange vilket eller vilka tal man skall börja med. Ett klassiskt exempel är Fibonaccis talföljd (f_n) som man får om man sätter de två första talen i följderna till 1. Alla andra tal bildas som summan av de två föregående.

Som notation för detta skriver vi $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ och $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Detta ger $(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$.

Detta sätt att ange talföljder kallas **rekursivt**, vilket ungefär betyder åter-skrivning.

Talföljder kan beskriva någon situation. Ett enkelt exempel är en situation där vi tänker oss att vi sätter in 50 000 kr i början av ett år på ett sparkonto med sparräntan 3%. I slutet på varje år tar vi ut 1000 kr. Om a_n står för hur mycket som finns på kontot i början av år n kan vi enkelt bilda ett rekursivt uttryck för hur behållningen på kontot förändras:

$$\begin{aligned}a_1 &= 50000 \\ a_{n+1} &= 1.03a_n - 1000.\end{aligned}$$

Att kunna omsätta en text som den ovan i denna typ av ekvation är ett standardproblemen!

Den intressanta frågan blir nu om man kan bilda ett uttryck som beskriver hur mycket pengar som finns på kontot ett visst år. Med andra ord skall vi försöka gå från en rekursiv definition för talföljden till ett uttryck för talföljden. Vi skall se att detta på många sätt liknar att lösa en differentialekvation.

På vägen kommer vi också att stöta på en del intressant matematik som kommer att ge djupare insikt i både denna typ av problem, men även differensekvationerna och diverse annan matematik.

3 Aritmetiska talföljder

Det enklaste fallet av talföljd är den där ett tal bildas så att det är summan av ett visst tal och talet före. Dessa talföljder benämns **aritmetiska**. Ett rekursivt uttryck för dessa är $a_{n+1} = a_n + d$ där d är en konstant. För att få en viss talföljd måste vi även ange a_1 .

Ett exempel på en aritmetisk talföljd är $(a_n) = (1, 4, 7, 10, 13, \dots)$ som ges av $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = a_n + 3$.

Ett uttryck för en aritmetisk talföljd är $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

4 Geometrisk talföljder

Ett annat enkelt exempel är **geometrisk** talföljder som fås då ett tal bildas från det föregående genom att det multipliceras med en konstant. Rekursivt uttrycks detta som $a_{n+1} = q a_n$. Man kan också formulera sig så att kvoten mellan ett tal och det föregående skall vara konstant. Därav namnet q som i *quotient*. Ofta benämns konstanten k , men i denna text används k som dummy-index i summor.

Ett exempel på en geometrisk talföljd är $(a_n) = (3, 6, 12, 24, 48, \dots)$ som fås genom $a_1 = 3$ och $a_{n+1} = 2a_n$.

Ett uttryck för en geometrisk talföljd är $a_n = a_1 q^{n-1}$.

5 Uttryck för summor

Vi skall se att det är intressant att bilda summan av talen i en talföljd. Dels kommer detta dyka upp rent matematikst, men det finns också tillämpningar som bygger på detta.

Sats 5.0.1. Om (a_n) är en aritmetisk talföljd gäller

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + a_n}{2}n.$$

Sats 5.0.2. Om (a_n) är en geometrisk talföljd gäller

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \quad (5.1)$$

Att kunna använda dessa uttryck för summor är standardproblemen! (Det finns dock oftast bra övningar på detta i normala läromedel, så de utlämnas här. Detsamma gäller beviset för satserna.)

6 Konvergens av talföljder

En talföljd (a_n) sägs **konvergera** mot ett tal a om gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

är väldefinierat.

Om gränsvärdet $a = \infty$ sägs följden ha ett **oegentligt gränsvärde** eftersom $\infty \notin \mathbb{R}$.

Exempelvis konvergerar talföljden $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$ mot talet 0.

Aritmetiska talföljder konvergerar inte mot något tal om inte $d = 0$, men geometriska talföljder går mot 0 om $|q| < 1$.

En talföljd som inte är konvergent är **divergent**.

Exempel på en divergent följd är $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$.

7 Serier

En talföljd (a_n) definierar en **serie**, vilket är ett uttryck på formen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

En serie kan ha ändligt eller oändligt många termer.

Frågan är om summan av dessa tal är väldefinierad (det är förstås bara intressant om serien har oändligt många termer). Ett lämpligt mellansteg för att reda ut detta är att bilda den n :te **delsumman** s_n enligt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Detta ger oss en ny talföljd (s_n) . Om denna är konvergent med gränsvärdet s säger vi att hela serien har **summan** s och skriver

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Ett intressant fenomen är att vissa serier kan ha summor som är irrationella tal (eller till och med transcendentala!), trots att alla termer är rationella tal. Exempelvis gäller

$$\ln(2) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots, \quad (7.1)$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots. \quad (7.2)$$

Dessa exempel visar att en serie är en form att uttrycka sig på. Jämför med att uttrycka rationella tal på bråkform och decimalform. En typisk skolboks-övning på detta är ”skriv $3/4$ på decimal form”. Man skulle kunna tänka sig ”skriv $\ln(2)$ som en serie av rationella tal” som en liknande övning på serier.

Om du har stött på potensserier tidiagare skall du naturligtvis jämföra med detta också. Exempelvis gäller

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

En serie som bildas som summan av talen i en geometrisk talföljd benämns **geometrisk serie**.

Sats 7.0.1. *En geometrisk serie har summan*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k = \frac{a_1}{1 - q}$$

om $|q| < 1$.

8 Betingat konvergenta serier

En serie är **absolutkonvergent** om

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

är väldefinierat.

Observera att en serie kan vara konvergent utan att vara absolutkonvergent. Exempelvis gäller

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = \infty.$$

Jämför detta med (7.1) som har summan $\ln(2)$.

En serie som är konvergent men inte absolutkonvergent benämns **betingat konvergent**.

Några observationer: En betingat konvergent talföljd (a_n) måste bestå av både positiva och negativa tal. De måste "ta ut varandra" på ett sådant sätt att summan av alla tal går mot något värde. Om (P_n) respektive (N_n) är de positiva respektive negativa talen i (a_n) måste både $P_n \rightarrow 0$ och $N_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ gälla. Däremot kan inte summan av alla talen i någon av dessa följder vara definierad. Om till exempel summan av talen i (P_n) får något värde, men inte (N_n) , kan inte (a_n) vara konvergent.

Följande sats är ett underbart exempel på hur kontraintuitiv matematiken kan vara.

Sats 8.0.1. (Riemanns omordningssats) *En betingat konvergent serie kan få vilken summa som helst genom att ordningsföljden mellan termerna ändras.*

Bevis. Låt (a_n) vara termerna i den betingat konvergenta serien. Vi kan få summan av talen ur (a_n) att konvergera mot det godtyckliga talet s med följande metod. Antag att $s > 0$. Bilda summan av så många tal ur (P_n) att summan överstiger s . Eftersom summan av talen i (P_n) inte är definierad finns det tillräckligt med tal så att detta inträffar någon gång.

Lägg därefter till så många tal ur (N_n) att summan blir mindre än s . Återigen vet vi att detta kommer att gå eftersom summan av talen i (N_n) inte är definierad.

Upprepa detta: Lägg till positiva och negativa tal så att summan blir större än s och mindre än s varannan gång. Eftersom de kvarvarande talen ur både (P_n) och (N_n) blir mindre och mindre kommer vi förvisso att få hålla på längre och längre, men vi kan därmed också vara säkra på att vi kan komma godtyckligt nära s (vilket är definitionen på att summan får gränsvärdet s). $\square$

Omslagsbilden till denna text visar hur summan av talen i $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$ successivt väljs så att summan av dem går mot talet 1.7.

9 Differensekvationer

All teori och alla exempel i detta avsnitt är att betrakta som standardproblem!

9.1 Inledning och enkla fall

En **differensekvation av ordning ett** är ett uttryck på formen

$$a_{n+1} + qa_n = b_n.$$

Exempel på en sådan är $a_{n+1} - 2a_n = n^2 - 3n$.

Om $b_n \equiv 0$ är differensekvationen **homogen**, annars är den **inhomogen** (som i exemplet ovan).

Att lösa en differensekvation innebär att man hittar ett uttryck för a_n .

Att gå från en rekursiv definition för en talföljd till ett uttryck för en talföljden är alltså precis samma sak som att lösa en differensekvation.

Vi har sett att aritmetiska talföljder kan uttryckas rekursivt som

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Betraktat som en (inhomogen!) differensekvation har den alltså lösningen

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Jämför man med differentialekvationer så kanske du tycker att det borde dyka upp en obekant konstant C som måste bestämmas med ett villkor. Det är riktigt, men det syns inte lika tydligt. Om vi har ett villkor som säger att $a_1 = C$ så ser du att det alltså är a_1 själv som är C .

Den geometriska talföljden är lösning till differensekvationen

$$a_{n+1} - qa_n = 0.$$

Denna differensekvation är homogen och har alltså lösningen

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

För att jämförelsen med differentialekvationer skall bli tydligare kan vi uttrycka detta $a_n = Cq^n$.

Exempelvis har $a_{n+1} - 4a_n = 0$ lösningen $a_n = C4^n$. Om har $a_1 = 8$ som villkor får vi $C4^1 = 8$ vilket ger $C = 2$ och därmed $a_n = 2 \cdot 4^n$.

Lite senare i denna text skall vi se hur differensekvationer motsvarar differentialekvationer. Innan vi reder ut det fullständigt för vi nöja oss med att konstatera att de geometriska talföljderna i någon mening motsvarar funktioner av typen $f(x) = Ce^x$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} + qa_n = 0 &\leftrightarrow f' + qf = 0 \\ a_n = C(-q)^n &\leftrightarrow f(x) = Ce^{-qx} \end{aligned}$$

Det är alltså bara att skriva upp lösningen till en homogen differensekvation av ordning ett på samma sätt som man skriver upp lösningen till en homogen differentialekvation.

9.2 Inhomogena fallet

Om man har en inhomogen differensekvation resonerar man på samma sätt som man gör med differentialekvationer. Vi studerar några exempel.

Exempel 9.2.1. Låt oss lösa

$$a_{n+1} - 2a_n = 3n - 4$$

med villkoret $a_1 = 7$.

Precis som för differentialekvationer finns en homogen lösning och en partikulärlösning som svarar mot just detta högerled.

Den homogena lösningen är bara att skriva ned. Den blir

$$a_n^h = C2^n.$$

Konstanten C kan vi inte bestämma innan vi känner den allmänna lösningen.

För att hitta partikulärlösningen antar vi ett uttryck av samma grad som högerledet. Låt

$$a_n^p = \beta n + \alpha.$$

När man löser differentialekvationer antar man en funktion som partikulärlösning. Den deriveras sedan och detta sätts in i differentialekvationen. Här får vi göra på nästan samma sätt. Bilda a_{n+1}^p och sätt in. Vi får

$$a_{n+1}^p = \beta(n+1) + \alpha$$

och

$$\beta(n+1) + \alpha - 2(\beta n + \alpha) = 3n - 4.$$

Vi förenklar till

$$\beta n + \beta + \alpha - 2\beta n - 2\alpha = 3n - 4$$

och identifierar koefficienter framför n :

$$\begin{array}{rcl} n : & -\beta & = 3 \\ 1 : & \beta - \alpha & = -4. \end{array}$$

Detta ekvationssystem har lösningen

$$\begin{array}{rcl} \beta & = & -3 \\ \alpha & = & 1. \end{array}$$

Den allmänna lösningen blir då

$$a_n = a_n^h + a_n^p = C2^n - 3n + 1.$$

Nu kan vi bestämma C . Villkoret $a_1 = 7$ ger ekvationen

$$\begin{array}{rcl} 7 & = & C2^1 - 3 \cdot 1 + 1 \\ 9 & = & 2C. \end{array}$$

Lösningen är alltså

$$a_n = \frac{9}{2} \cdot 2^n - 3n + 1.$$

▲

Lösningsmetoden går att sammanfatta i följande steg.

- Skriv upp den homogena lösningen direkt.
- Ansätt en partikulärlösning av samma grad som högerledet.
- Bilda "högre ordningar" (jämför med att derivera partikulärlösningen).
- Sätt in i differensekvationen.
- Förenkla.
- Identifiera koefficienter framför olika potenser av n .
- Lös ekvationssystemet.
- Skriv den allmänna lösningen som summa av den homogena lösningen och partikulärlösningen.
- Bestäm C om du har något villkor som måste uppfyllas.

Exempel 9.2.2. Om högerledet är av grad två får man generellt ansätt ett polynom av lika grad. (Men vi skall se i nästa exempel att det inte alltid räcker!). Låt oss lösa

$$a_{n+1} + 3a_n = n^2 - 2n + 1.$$

Här följer en kortare lösning enligt stegen ovan.

Den homogena lösningen är

$$a_n^h = C(-3)^n.$$

Vi ansätter

$$\begin{aligned} a_n^p &= \gamma n^2 + \beta n + \alpha \\ a_{n+1}^p &= \gamma(n+1)^2 + \beta(n+1) + \alpha = \\ &= \gamma(n^2 + 2n + 1) + \beta(n+1) + \alpha \end{aligned}$$

och sätter in i ekvationen. Vi får

$$\begin{aligned} \gamma(n^2 + 2n + 1) + \beta(n+1) + \alpha + 3(\gamma n^2 + \beta n + \alpha) &= n^2 - 2n + 1 \\ \gamma n^2 + \gamma 2n + \gamma + \beta n + \beta + \alpha + 3\gamma n^2 + 3\beta n + 3\alpha &= n^2 - 2n + 1. \end{aligned}$$

Vi identifierar koefficienterna

$$\begin{array}{rcl} n^2 : & 4\gamma & = 1 \\ n : & 2\gamma + 4\beta & = -2 \\ 1 : & \gamma + \beta + 4\alpha & = 1. \end{array}$$

Detta ekvationssystem har lösningen

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{4} \\ \beta &= -\frac{3}{8} \\ \alpha &= \frac{9}{32}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$a_n = C(-3)^n + \frac{n^2}{4} - \frac{3n}{8} + \frac{9}{32}$$

Eftersom vi inte har något villkor kan vi inte bestämma C . ▲

Exempel 9.2.3. Nu skall vi se på ett specialfall. Låt oss lösa

$$a_{n+1} - a_n = 3n + 1.$$

Den homogena delen av detta blir

$$a_{n+1} - a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n.$$

Detta betyder att den homogena lösningen är en konstant, eftersom ett nytt tal i talföljden skall vara lika med det föregående.

Kvoten mellan två på varandra följande element är 1, så vi får $a_n^h = C1^n \equiv C$.

Som partikulärlösning ansätter vi ett polynom av grad 1, förenklar och sätter in. Vi får

$$\begin{aligned} a_n^p &= \beta n + \alpha \\ a_{n+1}^p &= \beta(n+1) + \alpha = \\ &= \beta n + \beta + \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta n + \beta + \alpha - (\beta n + \alpha) &= 3n + 1 \\ \beta &= 3n + 1 \end{aligned}$$

Vi ser att detta inte går att lösa.

Av olika anledningar som kommer att beskrivas i avsnitt 12 måste vi ansätta ett polynom av högre grad än högerledet då $q = 1$.

Vi ansätter istället

$$\begin{aligned}a_n^p &= \gamma n^2 + \beta n + \alpha \\a_{n+1}^p &= \gamma(n+1)^2 + \beta(n+1) + \alpha = \\&= \gamma(n^2 + 2n + 1) + \beta(n+1) + \alpha\end{aligned}$$

och sätter in. Vi får

$$\begin{aligned}\gamma(n^2 + 2n + 1) + \beta(n+1) + \alpha - (\gamma n^2 + \beta n + \alpha) &= 3n + 1 \\ \gamma n^2 + \gamma 2n + \gamma + \beta n + \beta + \alpha - \gamma n^2 - \beta n - \alpha &= 3n + 1 \\ \gamma 2n + \gamma + \beta &= 3n + 1\end{aligned}$$

Vi ser att termer som innehåller n^2 försvinner. Det gör även de konstanta termerna. Kvar blir

$$\begin{aligned}n : \quad 2\gamma &= 3 \\ 1 : \quad \gamma + \beta &= 1.\end{aligned}$$

Detta går att lösa! Vi får

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{3}{2} \\ \beta &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Den allmänna lösningen är

$$a_n = C + \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

Att den konstanta termen α utgick ur partikulärlösningen får ingen praktisk betydelse eftersom det finns en obekant konstant från den homogena delen.

▲

9.3 Andra ordningen

En differensekvation av ordning två är ett uttryck på formen

$$a_{n+1} + pa_n + qa_{n-1} = b_n$$

Precis som för differentialekvationer får vi den homogena lösningen genom att bilda differensekvationens karakteristiska ekvation

$$x^2 + px + q = 0$$

som har rötterna $x_1 = r_1$ och $x_2 = r_2$.

Då är det bara att skriva upp den homogena lösningen

$$a_n^h = Cr_1^n + Dr_2^n.$$

Om vi får en dubbelrot $x = r$ blir den homogena lösningen

$$a_n^h = (Cn + D)r^n$$

Exempel 9.3.1. Låt oss lösa

$$a_{n+1} - 7a_n + 12a_{n-1} = 2n + 3$$

med villkoren $a_1 = 1$ och $a_2 = 2$.

Den homogena lösningen fås genom att lösa

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Lösningarna blir $x_1 = 3$ och $x_2 = 4$, så den homogena lösningen är

$$a_n^h = C 3^n + D 4^n.$$

Vi kan **inte** bestämma C och D redan nu! Det är **hela** lösningen som skall uppfylla villkoren, inte bara den homogena delen! **OBS! Vanligt fel!**

Som partikulärlösning ansätter vi ett polynom av samma grad som högerledet. Vi bildar därefter a_{n+1}^p och a_{n-1}^p . Vi får

$$\begin{aligned} a_n^p &= \beta n + \alpha \\ a_{n+1}^p &= \beta(n+1) + \alpha = \beta n + \beta + \alpha \\ a_{n-1}^p &= \beta(n-1) + \alpha = \beta n - \beta + \alpha \end{aligned}$$

Detta sätter vi in i ekvationen och förenklar. Vi får

$$\begin{aligned} \beta n + \beta + \alpha - 7(\beta n + \alpha) + 12(\beta n - \beta + \alpha) &= 2n + 3 \\ \beta n + \beta + \alpha - 7\beta n - 7\alpha + 12\beta n - 12\beta + 12\alpha &= 2n + 3 \end{aligned}$$

Vi identifierar koefficienter

$$\begin{aligned} n : \quad 6\beta &= 2 \\ 1 : \quad -11\beta + 6\alpha &= 3 \end{aligned}$$

och får

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{3} \\ \alpha &= \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$a_n = C 3^n + D 4^n + \frac{1}{3}n + \frac{10}{9}.$$

Vilkoren ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} C \cdot 3 + D \cdot 4 + \frac{1}{3} + \frac{10}{9} &= 1 \\ C \cdot 3^2 + D \cdot 4^2 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{10}{9} &= 2 \end{aligned}$$

som har lösningen

$$\begin{aligned} C &= -\frac{2}{3} \\ D &= \frac{7}{18} \end{aligned}$$

Lösningen är alltså

$$a_n = -\frac{2}{3} 3^n + \frac{7}{18} 4^n + \frac{1}{3}n + \frac{10}{9}.$$

▲

Som du ser så är metoden för att bestämma partikulärlösningen helt identisk med fallet med differensekvationer av ordning ett.

Även för differensekvationer av ordning två finns några specialfall man måste se upp med. Det kommer att visa sig att dessa uppkommer då $1 + p + q = 0$, och detta förklaras i avsnitt 12.

Exempel 9.3.2. Ett av specialfallen är

$$a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1} = 5n - 7.$$

Här gäller uppenbarligen $1 - 4 + 3 = 0$, och vi skall se vad det ställer till med.

Den homogena lösningen blir

$$a_n^h = C \cdot 1^n + D \cdot 3^n$$

eftersom rötterna till den karakteristiska ekvationen är 1 respektive 3.

Som partikulärlösning ansätter vi

$$a_n^p = \beta n + \alpha$$

eftersom graden för högerledet är 1.

Vi bildar

$$\begin{aligned} a_{n+1}^p &= \beta(n+1) + \alpha \\ a_{n-1}^p &= \beta(n-1) + \alpha \end{aligned}$$

och sätter in detta i differensekvationen. Vi får

$$\beta n + \beta + \alpha - 4(\beta n + \alpha) + 3(\beta n - \beta + \alpha) = 5n - 7.$$

Som du ser försvinner alla termer som innehåller n i vänsterledet. Då kan vi omöjligt välja β och α så att högerledet blir lika med vänsterledet.

Precis som i exempel 9.2.3 blir vi tvugna att ansätta ett polynom av högre grad.

Vi får

$$\begin{aligned}a_n^p &= \gamma n^2 + \beta n + \alpha \\a_{n+1}^p &= \gamma(n+1)^2 + \beta(n+1) + \alpha \\a_{n-1}^p &= \gamma(n-1)^2 + \beta(n-1) + \alpha\end{aligned}$$

som vi sätter in i vår ekvation. Vi får

$$\begin{aligned}\gamma(n+1)^2 + \beta(n+1) + \alpha - 4(\gamma n^2 + \beta n + \alpha) + 3(\gamma(n-1)^2 + \beta(n-1) + \alpha) &= 5n - 7 \\ \gamma(n^2 + 2n + 1) + \beta(n+1) + \alpha - 4(\gamma n^2 + \beta n + \alpha) + 3(\gamma(n^2 - 2n + 1) + \beta(n-1) + \alpha) &= 5n - 7.\end{aligned}$$

Även i detta fall kommer n^2 att försvinna från vänsterledet. Det är bra eftersom det inte finns någon sådan term i högerledet. Även α försvinner, vilket inte är så konstigt eftersom vi har en konstant term från den homogena lösningen (precis som i exempel 9.2.3).

Identifierar vi koefficienterna för det som blir kvar får vi

$$\begin{array}{rcl}n : & -4\gamma & = \quad 5 \\1 : & 4\gamma - 2\beta & = -7\end{array}$$

vilket har lösningen

$$\begin{aligned}\gamma &= -\frac{5}{4} \\ \beta &= 1.\end{aligned}$$

▲

Om lösningarna till den karakteristiska ekvationen är komplexa blir det ingen väsentlig skillnad i lösningsmetoden.

Om koefficienterna är reella fås komplexkonjugerade par av lösningar, och lösningen går att skriva om på ett sätt som liknar det man gör för motsvarande situation för differentialekvationer.

Inga exempel eller övningar är dock genererade för sådana fall ännu.

9.4 Exponentialfunktioner i högerledet

En differensekvation av typen

$$a_{n+1} - qa_n = b c^n$$

löses också genom att ansätta en partikulärlösning med samma egenskaper som högerledet.

Exempel 9.4.1. Låt oss lösa

$$a_{n+1} - 2a_n = 4 \cdot 5^n$$

med villkoret $a_1 = -7$.

Den homogena lösningen är som vanligt

$$a_n^h = C 2^n.$$

Som partikulärlösning ansätter vi

$$a_n^p = \alpha 5^n$$

eftersom vi har 5^n i högerledet i vår ekvation.

Vi bildar a_{n+1}^p sätter in a_n^p och a_{n+1}^p , och får

$$\begin{aligned}\alpha 5^{n+1} - 2\alpha 5^n &= 4 \cdot 5^n \\ 5\alpha 5^n - 2\alpha 5^n &= 4 \cdot 5^n.\end{aligned}$$

Med denna sorts högerled fås bara en obekant konstant α . Vi får också bara en ekvation då vi identifierar koefficienterna framför 5^n på båda sidor:

$$5\alpha - 2\alpha = 4$$

som har lösningen

$$\alpha = \frac{4}{3}.$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$a_n = C 2^n + \frac{4}{3} \cdot 5^n.$$

Villkoret $a_1 = -7$ ger ekvationen

$$-7 = C 2 + \frac{4}{3} \cdot 5$$

som har lösningen

$$C = -\frac{41}{6}.$$

Slutligen har vi alltså fått lösningen

$$a_n = -\frac{41}{6} \cdot 2^n + \frac{4}{3} \cdot 5^n.$$

▲

9.5 Övningar

Lös differensekvationerna.

1. $a_{n+1} + 3a_n = 8n^2 + 8n + 7$, $a_1 = -2$
2. $a_{n+1} - 2a_n = 3n^2 + 3n - 7$, $a_1 = -3$
3. $a_{n+1} - a_n = 4n + 5$, $a_1 = 10$
4. $a_{n+1} - a_n - 6a_{n-1} = 12n^2 - 4n - 6$, $a_1 = -1$, $a_2 = 13$
5. $a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = 2n^2 - 6n - 3$, $a_1 = 8$, $a_2 = 15$
6. $a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1} = -8n + 18$, $a_1 = 8$, $a_2 = 27$
7. $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 9$
8. Du kan bilda egna övningar med följande metod:

Bestäm en lösning, till exempel $a_n = 2 \cdot 7^n + 2n - 3$.

Detta måste vara en lösning till en DE av typen

$$a_{n+1} - 7a_n = An + B.$$

Faktorn -7 i vänsterledet identifieras från 7^n i lösningen, och högerledet måste vara ett polynom av grad ett eftersom lösningen också består av ett sådant (och det är inte frågan om något specialfall som gör att graderna måste skilja sig åt mellan partikulärlösningen och högerledet.)

Nu återstår att bestämma A och B . Om lösningen sätts in i ekvationen fås

$$2 \cdot 7^{n+1} + 2(n+1) - 3 - 7(2 \cdot 7^n + 2n - 3) = An + B$$

vilket förenklas till

$$\begin{aligned} 2 \cdot 7^{n+1} + 2n + 2 - 3 - 2 \cdot 7^{n+1} - 14n + 21 &= An + B \\ -12n + 17 &= An + B \end{aligned}$$

utifrån vilket vi identifierar $A = -12$ och $B = 17$.

Den allmänna lösningen till $a_{n+1} - 7a_n = -12n + 17$ är alltså $a_n = C \cdot 7^n + 2n - 3$. För att bestämma $C = 2$ (vilket var en del av valet från början) beräknar vi $a_1 = 2 \cdot 7^1 + 2 \cdot 1 - 3 = 13$.

Du kan nu roa dig eller någon annan med att lösa $a_{n+1} - 7a_n = -12n + 17$ med villkoret $a_1 = 13$, som alltså skall ha lösningen $a_n = 2 \cdot 7^n + 2n - 3$.

Facit.

1. $a_n = 2(-3)^n + 2n^2 + n + 1$
2. $a_n = 7 \cdot 2^n - 3n^2 - 9n - 5$
3. $a_n = 5 + 2n^2 + 3n$
4. $a_n = 3 \cdot 3^n + (-2)^n - 2n^2 - 4n - 2$
5. $a_n = -3^n + 4 \cdot 2^n + n^2 + 2n$
6. $a_n = 2 + 3 \cdot 3^n + 2n^2 - 5n$
7. $a_n = 2n^2 + 3n - 5$
8. -

10 Beräkningar av summor

När man lär sig bevisa påståenden med induktion, börjar man ofta med att bevisa påståenden i stil med

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Denna sorts påståenden lämpar sig väl för att träna på induktionstekniken, men om man vill bestämma ett uttryck för en summa ger inte bevistekniken i sig någon ledning.

Om man vill beräkna värdet av till exempel

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 + 4k$$

kan man dock använda en teknik som påminner om den man använder i induktionsbevis.

Om vi antar att

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^2 + 4k$$

så måste

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 + 4k = \sum_{k=1}^n k^2 + 4k + (n+1)^2 + 4(n+1).$$

Den första termen i sista ledet identifieras med a_n , vilket ger differensekvationen

$$a_{n+1} = a_n + (n+1)^2 + 4(n+1)$$

som går att lösa med de metoder vi avhandlade i kapitel 9. När vi känner lösningen kan a_{100} beräknas.

11 Tillämpningar

Här förtydligas hur vissa av standardproblemen skall tolkas och hur de löses. Speciellt poängteras hur vissa enkla standardproblem i själva verket är specialfall av differensekvationer. Detta görs för att knyta ihop olika delar av kursen.

11.1 Exempel från Matematik 1c i nytt ljus

Exempel 11.1.1. En insättning på ett sparkonto

Om 5000 kr sätts in 1/1 varje år på ett sparkonto med räntan 4% bildar behållningen på kontot talföljden (a_n) där a_n är behållningen år n .

Detta är ett enkelt exempel som ingår i Matematik 1c, men för att jämföra med teorin som tas upp här noterar vi att talföljden är lösning till den homogena differensekvationen

$$a_{n+1} = 1.04 a_n$$

med villkoret $a_1 = 5000$.

Lösningen är $a_n = 5000 \cdot 1.04^{n-1}$.

Under året är behållningen på kontot konstant, sparräntan betalas ut i slutet på varje år. I Matematik 1c tänker man på faktorn 1.04 som en förändringsfaktor.

Motsvarande differentialekvation är av typen $f' - kf = 0$ vars lösning är $f(x) = Ce^{kx}$. Skillnaden mellan situationer där differentialekvationer respektive differensekvationer är relevanta är att de senare är mer relevanta då en förändring sker vid bestämda (tid-)punkter, inte hela tiden (i alla punkter).

Visst kan man tänka på ett sparkonto med kontinuerlig tid, så att man får lite ränta hela tiden (vilket man måste göra om man till exempel tar ut pengarna under årets lopp). Den momentana räntan i detta exempel är dock inte 4%. Konstanten k i differentialekvationen ges istället av lösningen till $e^k = 1.04$.

Det är vanligt att man blandar ihop begreppet förändringsfaktor (som är en konstant) med begreppet förändringshastighet (som varierar).

Förändringsfaktorn är lite slarvigt uttryckt ”den sammanlagda effekten av alla förändringshastigheter under en period”, ett slags medelvärde med andra ord.



Exempel 11.1.2. Upprepade insättningar på ett sparkonto

Vi tänker oss att vi sätter in 1000 kr den 1/1 år varje år på ett sparkonto med räntan 4%. I Matematik 1c resonerar man sig fram till ett uttryck för behållningen a_n år n på kontot genom att inse hur länge de olika tusenlapparna varit på kontot. Vi får

$$\begin{aligned} a_n = & 1000 && \text{årets instättning} \\ & +1000 \cdot 1.04 && \text{förra årets instättning} \\ & +1000 \cdot 1.04^2 && \text{insättningen för två år sedan} \\ & + \dots \\ & +1000 \cdot 1.04^{n-1} && \text{den första insättningen.} \end{aligned}$$

Talföljden (a_n) utgör *inte* en geometrisk talföljd, men väl de n första delsummorna i en geometrisk serie. Vi får

$$a_n = \sum_{k=1}^n 1000 \cdot 1.04^{k-1} = 1000 \cdot \frac{1.04^n - 1}{1.04 - 1} \quad (11.1)$$

där vi använt (5.1).

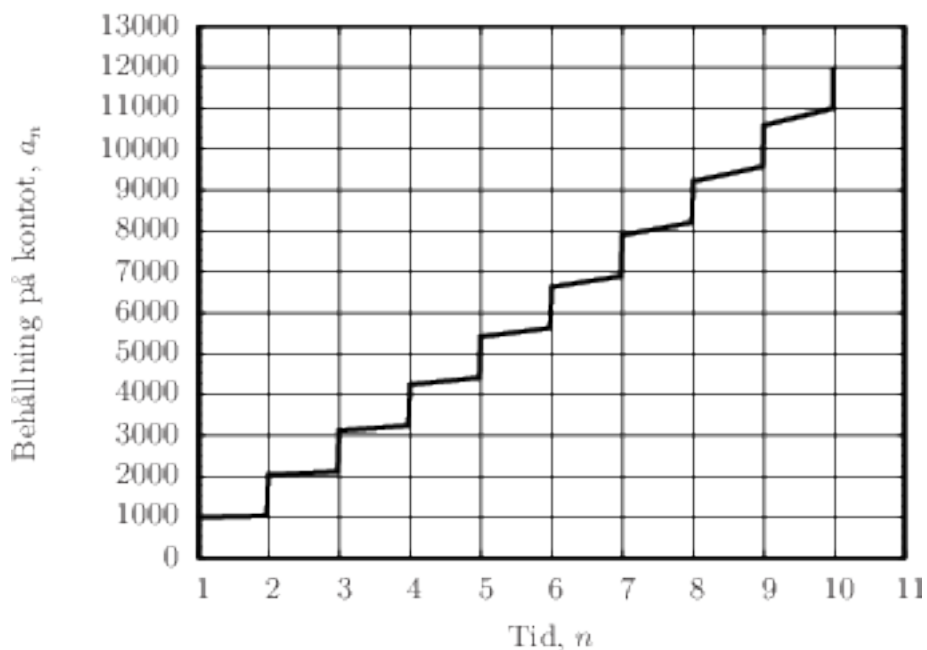
Att både få ränta på behållningen under året och dessutom momentant sätta in pengar på kontot gör att situationen beskrivs av differensekvationen

$$a_{n+1} = 1.04 a_n + 1000$$

med villkoret $a_1 = 1000$.

Detta är en inhomogen differensekvation vars lösning naturligtvis är (11.1). Det är en bra övning att härleda detta!

För att jämföra med nästa exempel studerar vi hur behållningen på kontot utvecklas, vilket visas i grafen nedan.



Under varje år växer behållningen exponentiellt med totalt 4% under året. Direkt efter den 10:e instättningen finns¹ alltså

$$a_{10} = 1000 \cdot \frac{1.04^{10} - 1}{1.04 - 1} \approx 12006.1071229586$$

kronor på kontot.

På riktigt tillförs inte räntan kontinuerligt, utan betalas ut i slutet på året. Under första året finns alltså 1000 kr på kontot, ända till den första räntan på 40 kr betalas ut² 31/12. ▲

Exempel 11.1.3. Annuitetens storlek

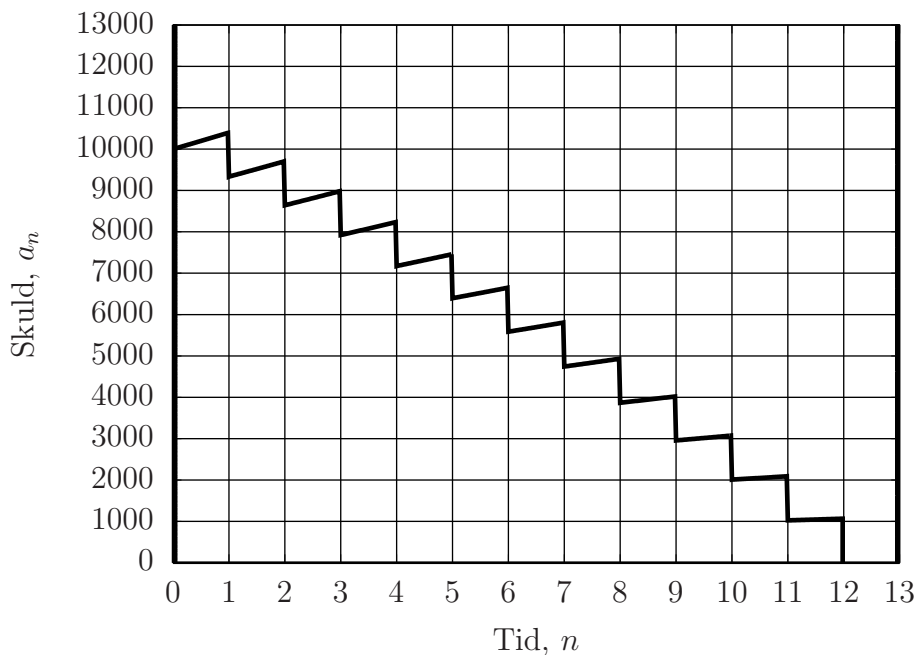
Ett liten utvidning av förra problemet rör att bestämma annuitetens storlek för att ett lån skall betalas tillbaka på en given tid.

Antag att ett lån på 10 000 kr tagits som skall betalas tillbaka på ett år (12 avbetalningar i slutet av varje månad) med *månadsräntan* 4%.

Poängen med denna typ av lån är att de skall betalas tillbaka med ett i förväg bestämt lika stora avbetalningar som kallas annuiteter. Detta är vanligt för mindre belopp, till exempel om en TV köps av någon elektronikhandel. Därav den ganska korta avbetalningstiden i exemplet.

För större lån, som till exempel lån på ett hus, betalas räntan separat (vilket oftast är obligatoriskt). Därutöver betalar man tillbaka lånet enligt någon plan, till exempel 1/30 av lånet varje år. Ibland kan planen vara att inte betalar något alls förrän man säljer sitt hus och löser in hela lånet.

Hur som helst skall vi nu bestämma hur stor annuiteten skall vara så att skulden utvecklas enligt grafen nedan.



Det kan vara ganska svårt att relatera till ett matematiskt uttryck för denna graf. Därför är det mer praktiskt att tänka såhär istället:

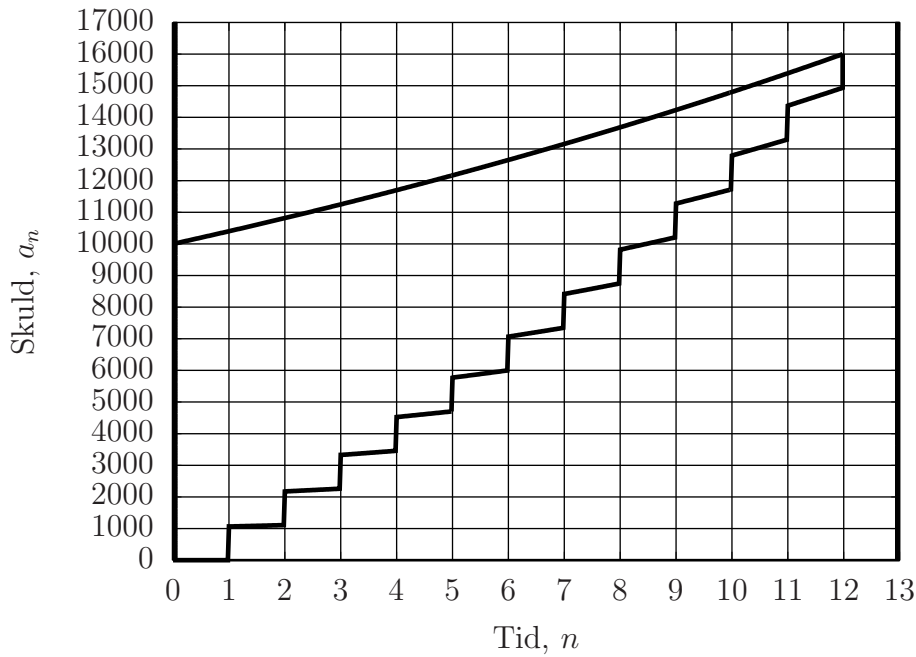
¹ Att ha en så här många värdesiffror får tolkas som en matematikers skämt. Vi gillar ju exakta lösningar!

² Kan bero på bank och konto.

Antag att du istället för att betala till butiken sätter in pengar på ett sparkonto istället, som i förra exemplet. Vi tänker oss också att lånet växer med samma räntesats under tiden, vilket betyder att vi i slutändan skall betala tillbaka $10000 \cdot 1.04^{11}$ kr.

Frågan övergår nu till att fundera ut hur mycket vi måste *spara* varje månad för att nå upp till detta belopp enligt exemplet innan.

Grafen nedan visar denna situation.



Om annuitetens storlek är x får vi ekvationen

$$10000 \cdot 1.04^{11} = x \cdot \frac{1.04^{11} - 1}{1.04 - 1}$$

som har lösningen $x \approx 1149.490393$.



11.2 Jämvikter vid diskreta förändringar

Talföljder som ges av lösningar till differensekvationer av typen

$$a_{n+1} - qa_n = d \tag{11.2}$$

med något startvärde a_1 är viktiga då de beskriver situationer som ofta förekommer i verkligheten. Vi skall se att detta är det diskreta fallet av situationer som beskrivs av differentialekvationer av typen $f' - qf = a$. Lösningarna till dessa den egenskapen att det finns ett jämviktsvärde på för $f(x)$ som nås då $x \rightarrow \infty$. Vi skall se att vi återfår detta beteende även i det diskreta fallet.

Först kan vi notera att om $d = a_1$ ges a_n av den n:te delsumman av en geometrisk

talföljd t_n . Vi har då

$$\begin{aligned} t_1 &= a_1 & a_1 &= a_1 \\ t_2 &= a_1 q & a_2 &= a_1 q + a_1 \\ t_3 &= a_1 q^2 & a_3 &= a_1 q^2 + a_1 q + a_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ t_n &= a_1 q^{n-1} & a_n &= \sum_{k=1}^n a_1 q^{n-k} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Uttrycket för a_n är alltså lösningen till (11.2) om $d = a_1$.

Vi får naturligtvis detta uttryck om vi löser (11.2) med vår vanliga metod. Den blir ganska enkel eftersom högerledet är en konstant. Vi får

$$a_n^h = Cq^n$$

och ansätter

$$a_n^p = \alpha.$$

Sätter vi in a_n^p och a_{n+1}^p får vi

$$\alpha - q\alpha = d \Rightarrow \alpha = \frac{d}{1 - q}.$$

Den allmänna lösningen ges alltså av $a_n = Cq^n + \frac{d}{1 - q}$. Med ett givet värde för a_1 bestämmer vi C genom

$$a_1 = Cq^1 + \frac{d}{1 - q} \Rightarrow qC = \frac{a_1(1 - q) - d}{1 - q}.$$

Vi får

$$a_n = \frac{a_1(1 - q) - d}{1 - q} q^{n-1} + \frac{d}{1 - q} \quad (11.3)$$

som i fallet $d = a_1$ reduceras till

$$a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Vi vet redan att talen i geometriska talföljder går mot noll om $|q| < 1$, vilket gör att delsummorna konvergerar mot $\frac{a_1}{1 - q}$. Vi skall nu se vad detta betyder i de tillämpningar som beskrivs av differensekvationer av typen (11.2).

Exempel 11.2.1. Modellproblemet är att någon medicineras så att en dos d tillförs med ett visst tidsintervall. Mellan doserna bryts den ackumulerade mängden medicin a_n efter n tabletter ned³ med en viss förändringsfaktor q .

Antag för att dosen $d = 1$ vilket i detta fall även blir a_1 . Antag också att 20% bryts ned vilket ger $q = 0.8$.

Vi inser att det finns en jämviktsnivå a^j för mängden medicin i patienten som måste vara så stor att dosen som tillförs är lika med det som bryts ned, dvs 20% av a^j skall vara d . Vi får

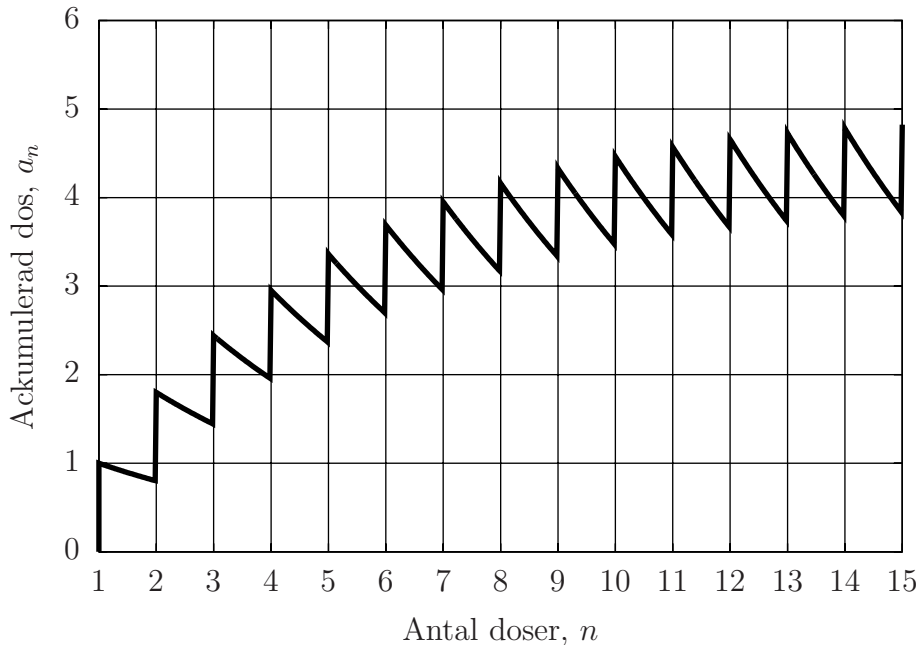
$$a^j = \frac{d}{1 - q} = \frac{1}{0.2} = 5.$$

³I formuleringen "bryts ned" ingår även "används av kroppens celler till något bra". Det är mängden medicin i blodet som är intressant.

Matematiskt följer detta ur att $a_n = a^j \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = 0$. Det senare ger

$$qa_n + d - a_n = 0 \Rightarrow a_n = \frac{d}{1 - q}.$$

Nedan visas a_n där även de tänkta värdena på a_n för $n \in \mathbb{R}$ visas för att illustrera nedbrytningen mellan doserna. Kurvan kommer gå mot värdet 5 precis efter att en dos tagits.



Det är faktiskt inte viktigt att $a_1 = d$. Studerar vi (11.3) ser vi att $a_n \rightarrow a^j$ oavsett vad a_1 är. Om $a_1 > a^j$ går till exempel kurvan mot a^j ovanifrån. ▲

Exempel 11.2.2. Ett annat viktigt fall där denna typ av jämvikt uppträder är situationer som liknar att man har ett belopp på ett sparkonto där man tar ut en del av räntan varje år.

Antag att du har 10000 kr på ett sparkonto med räntan 4%. Då får du 400 kr i ränta varje år. Tar du ut detta belopp kvarstår 10000 kr på kontot.

I denna situation är alltså $d = -400$ och $q = 1.04$. Vi får jämviktsvärdet

$$a^j = \frac{d}{1 - q} = \frac{-400}{1 - 1.04} = 10000,$$

vilket stämmer med situationen.

Om vi däremot bara tar ut 300 kr varje år kommer behållningen på kontot att växa. Det finns inget jämviktsvärde i normal mening. Eftersom $q > 1$ konvergerar inte delsummorna mot något. Uttrycket

$$a^j = \frac{d}{1 - q} = \frac{-300}{1 - 1.04} = 7500$$

måste tolkas som att det skulle ha räckt med 7500 kr på kontot för att kunna ta ut 300 med bibehållen jämvikt. ▲

12 Samband med differentialekvationer

Här förklaras varför specialfallen uppstår och hur de skall tolkas. Detta är att betrakta som överkurs i Matematik 5.

12.1 Ordning ett

Antag att vi har en funktion $f(x)$, men studerar endast dess värden i vissa punkter. Vi delar in x-axeln i $x_1, x_2, x_3, \dots$ med ett konstant intervall Δx . Detta kallas för att vi har **diskretiserat** x-axeln.

Funktionens värden i dessa punkter bildar en talföljd (f_n) där $f_n \equiv f(x_n)$.

I en punkt definieras derivatan av funktionen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

I det diskreta fallet kan vi inte låta $\Delta x \rightarrow 0$ eftersom vi bara har enskilda punkter. Vi får därför

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{\Delta x} = \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta x}.$$

Om vi sätter in detta i en differentialekvation av typen $f'(x) + kf(x) = 0$ får vi

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta x} + kf_n &= 0 \Leftrightarrow \\ f_{n+1} + (k\Delta x - 1)f_n &= 0. \end{aligned}$$

Med $q = k\Delta x - 1$ fås $f_{n+1} + qf_n = 0$.

En differensekvation av typen $a_{n+1} + qa_n = 0$ motsvaras alltså av en differentialekvation av typen $f'(x) + kf(x) = 0$.

En inhomogen differensekvation av typen $a_{n+1} + qa_n = b_n$ motsvaras på samma sätt av $f'(x) + kf(x) = g(x)$ där $b_n \equiv g(x_n)$.

Lösningarna $f(x) = Ce^{-kx}$ respektive $f_n = C(-q)^n$ korresponderar också mot varandra. Man kan visa⁴ att

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 - k\Delta x)^n = e^{kx}$$

vilket ger $f_n \rightarrow f(x)$ då $\Delta x \rightarrow 0$.

Sammanfattningsvis gäller följande korrespondens mellan det kontinuerliga och diskreta fallet.

$$\begin{aligned} x &\leftrightarrow x_n \\ f(x) &\leftrightarrow f_n \\ f'(x) &\leftrightarrow f'_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta x} \\ f'(x) + kf(x) = 0 &\leftrightarrow f_{n+1} + qf_n = 0 \text{ där } q = k\Delta x - 1 \\ f(x) = Ce^{-kx} &\leftrightarrow f_n = C(-q)^n. \end{aligned}$$

⁴Bland annat gäller $n = \frac{x}{\Delta x}$. Hur beviset i övrigt går till beror faktiskt på hur man definierat talet e . Det kan göras på olika sätt, vilket ger lite olika bevis för denna likhet.

Nu kan vi återgå till frågan om varför man ibland måste ansätta en partikulärlösning som har högre grad än högerledet. Det uppstår för första ordningens differensekvationer då $q = -1 \Leftrightarrow k = 0$. Dessa differensekvationer motsvarar differentialekvationer av typen $f'(x) = g(x)$.

Dessa löses genom att båda led integreras, vilket ger $f(x) = G(x) + C$, där $G(x)$ är primitiv funktion till $g(x)$ och därmed har en högre grad.

Integrationskonstanten får vi med vår lösningsmetod från den homogena lösningen som är $f_n^h = C1^n = C$. Eftersom det redan finns en konstant från den homogena lösningen, behöver vi inte ha en till i partikulärlösningen. Därför kan vi utesluta den.

12.2 Ordning två

För att reda ut vad som händer i fallet med ekvationer av ordning två är det smidigare att använda en central differenskvot för andraderivatan av en funktion:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x - \Delta x)}{2\Delta x} \\ &\Leftrightarrow \\ f_n'' &= \frac{f'_{n+1} - f'_{n-1}}{2\Delta x} = \frac{\frac{f_{n+2} - f_n}{2\Delta x} - \frac{f_n - f_{n-2}}{2\Delta x}}{2\Delta x} = \\ &= \frac{f_{n+2} - 2f_n + f_{n-2}}{(2\Delta x)^2}. \end{aligned}$$

Om vi tänker oss att vi halverar steglängden får vi

$$f_n'' = \frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}}{\Delta x^2}.$$

Redan nu kan vi förstå varför man måste ansätta ett polynom av högre grad än högerledet i fallet $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = b_n$.

En differensekvation av typen $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = b_n$ motsvaras av en differentialekvation av typen $f''(x) = g(x)$.

Differentialekvationen integreras två gånger till $f'(x) = G(x) + C$ och vidare till $f(x) = \int G(x)dx + Cx + D$. Termen $\int G(x)dx$ är av två grader högre än $g(x)$ och det dyker upp en linjär term Cx som är primitiv funktion till den första integrationskonstanten, samt en konstant term D från den andra integreringen.

Den karakteristiska ekvationen för motsvarande differensekvation har en dubbelrot som är 1. Vi har lärt oss att den homogena lösningen då blir

$$a_n^h = (Cn + D)1^n = Cn + D.$$

Härifrån kommer alltså den linjära och konstanta termen. Som partikulärlösningen måste vi ansätta ett polynom som är två grader högre än högerledet, men vi kan utesluta den linjära och den konstanta termen eftersom de ändå kommer att dyka upp i den homogena lösningen.

En allmän differensekvation av ordning två kan skrivas om enligt

$$a_{n+1} + pa_n + qa_{n-1} = a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} + (p+2)a_n + (q-1)a_{n-1} = b_n$$

Att $1 + p + q = 0$ betyder att $p + 2 = 1 - q$ vilket gör att vi i detta fall kan skriva om detta ytterligare enligt

$$a_{n+1} + pa_n + qa_{n-1} = \underbrace{a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1}}_{\text{Motsvarar } f''} + (1-q) \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{\text{Motsvarar } f'} = b_n.$$

En differensekvation av typen $a_{n+1} + pa_n + qa_{n-1} = b_n$ där $1 + p + q = 0$ motsvaras av en differentialekvation av typen $f''(x) + (1-q)f'(x) = g(x)$. I specialfallet $q = 1$ utgår förstaderivatans av $f(x)$.

Att $1 + p + q = 0$ ger att den karakteristiska ekvationen kommer att ha rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = q$. Om $q = 1$ fås en dubbelrot.

Vi har sett att man i detta fall måste ansätta ett polynom av en grad högre än högerledet, men att den inte behöver innehålla någon konstant term. Det sista beror på att vi får en konstant term från den homogena lösningen eftersom den ena roten är 1.

En differentialekvation av typen $f''(x) + kf'(x) = g(x)$ löses genom att man först integrerar en gång till $f'(x) + kf(x) = G(x)$. Denna har lösningen

$$f(x) = Ce^{-kx} + \text{partikulärlösning}$$

där partikulärlösningen har samma grad som $G(x)$, vilket är en grad högre än $g(x)$.

12.3 Sammanfattning

Vi har nu sett att vi får samma lösningar i det diskreta fallet som i det kontinuerliga fallet. I alla fall att det finns en korrespondens mellan dem.

Varför är då detta viktigt? Att det är ett stycke vacker matematik är skäl nog. De olika delarna av Matematik 5 knyts ihop till en vacker enhet. Men det är också principiellt viktigt att reda ut detta.

En dator kan inte hantera funktioner definierade på alla reella tal. Om man skall göra en numerisk simulering av ett system måste man på något vis diskretisera något. Oftast både tid och rum.

Det man vill göra med numeriska lösningar är att lösa problem som man inte kan lösa analytiskt. Det första man måste kontrollera är om de numeriska lösningarna ger samma lösningar som de analytiska om man tillämpar dem på de lösbara fallen. Om lösningarna inte blir lika kan man absolut inte lita på lösningar man får i de analytiskt olösbara fallen.

Därför är det viktigt att reda ut att de diskreta ekvationerna och deras lösningar hänger ihop med sina kontinuerliga motsvarigheter.