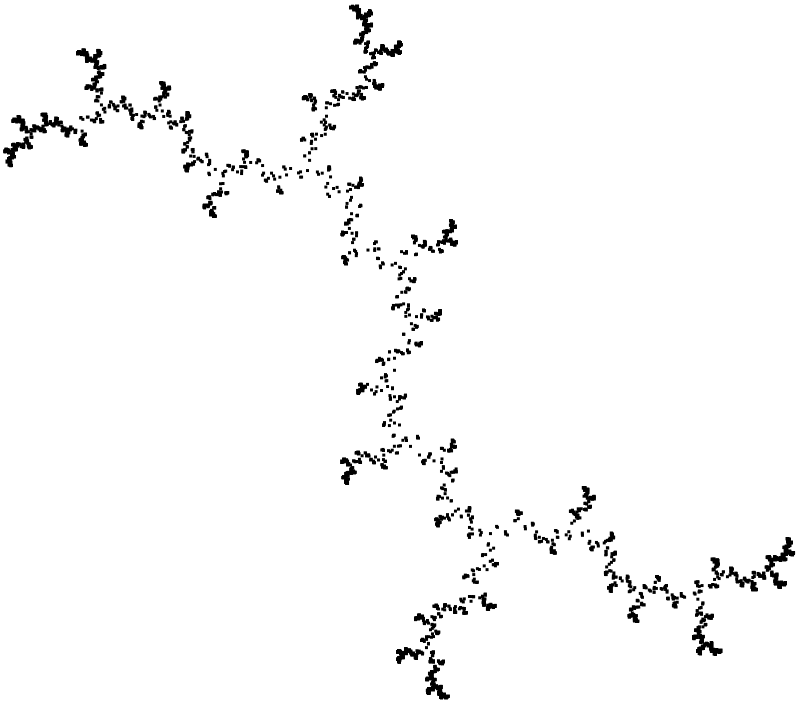


Koordinatgeometri

Johan Wild

2020–02–12

johan.wild@europaskolan.se

2020–02–12

Innehåll

1 Inledning

Denna text tar upp koordinatgeometrin som ett axiomatiskt system. Syftet är att ge en djupare förståelse för en rad begrepp som normalt tas upp lite mer handviftande.

Ett annat viktigt syfte med texten är att jämföra koordinatgeometrin med den Euklidiska geometrin. Eftersom definitionerna av olika begrepp skiljer sig åt radikalt, inträffar det ibland att det som är en definition i det ena systemet kan bevisas som en sats i det andra.

Det är viktigt att lära sig skilja på de olika axiomatiska systemen. Man kan inte använda ett känt samband från det ena systemet för att bevisa något i det andra.

Texten är skriven för att vara ett läromedel i kursen Axiomatiska System på Europaskolan. Den är tänkt att harmoniera med kursen Matematik 2c.

Tack till alla vänliga elever, speciellt Hampus Söderström Sci11, som uppmärksammat mig på så många fel i denna text.

2 Historia

Ptolemaios (ca 100 - 170 e Kr) sammanställde alla matematiska modeller över Grekernas världsbild i ett verk om 13 böcker. Det går idag under namnet *Almagest*. Det innehåller bland annat matematiska beskrivningar av hur planeterna rör sig, longitud och latitud för på den tiden viktiga platser och resonemang om olika typer av kartprojektioner.

Mycket litet är känt om Ptolemaios, men han var verksam i Alexandria och skrev fler böcker än detta verk.

Hur som helst innehåller Almagest en tabell som används för att omvandla ett tal till ett annat och tillbaka, nämligen sambandet mellan medelpunktsvinkel och kordan längd i en given cirkel. Detta är det tidigaste exemplet på det vi idag kallar *funktion*.

Descartes (1596 - 1650) och Fermat (1601-1665) brukar anses vara koordinatsystemets fäder. Descartes och Fermat (samt deras föregångare) studerade *kägelsnitt*, kurvor som uppkommer då ett plan skär en kon, se avsnitt 14, och ville bevisa påståenden om parablar och hyperblar (två fall som då kan uppkomma). I Descartes stora text om tankemetodik (1637) fanns ett avsnitt om geometri där han låter en punkt röra sig längs en linje. Problemet löses sedan algebraiskt genom att finna punktens (enda) koordinat.

Descartes gick från geometri (kurva) till algebra. Han kunde ge ett algebraiskt uttryck för en geometrisk konstruerad kurva och han ansåg länge att inga andra kurvor var av intresse.

Fermat gick från algebra till kurva. Han ansåg att vilket uttryck som helst (i två variabler) kunde resultera i en kurva.

Det vi idag kallar ekvationen för en rät linje formulerades av Jan de Witt (1623-1672). Han kunde göra koordinatbyten som tillät fullständig utredning av alla kurvor av grad två (ellips, hyperbel, parabel). Dock bara för positiva värden på koordinaterna.

3 Grundläggande definitioner i geometrin

Vi skall nu bygga upp en koordinatgeometri som ett axiomatiskt system. Det är viktigt att inte blanda ihop detta axiomatiska system med den Euklidiska geometrin, som är ett annat axiomatiskt system. Därför kommer vi att göra jämförelser med den Euklidiska geometrin då det passar.

Om du tror att du vet vad som menas med en linje, eller en cirkel, så måste du vara observant på den logiska konstruktionen av detta system. Bara för att vi har något som benämns linje i vår ”vardag”, måste vi ändå göra en precis matematisk definition av begreppet linje. Vi kan inte använda begrepp som vi inte definierat!

3.1 Punkter och koordinatsystem

Vi inleder med begreppet punkt. Euklides definierar detta med ”en punkt är det som inte kan delas”. Som namnet koordinatgeometri antyder, kommer vi använda oss av ett koordinatsystem. Detta är en modern uppfinning, jämfört med den Euklidiska geometrin. Användningen av koordinatsystem växte fram under 1600-talet och det brukar sägas att Descartes och Fermat är upphovsmän till detta begrepp. Finessen med koordinatgeometrin är att vi kan koppla ihop algebran med geometrin.

Vi är nu redo att definiera en punkt.

Definition 3.1.1. En punkt är ett ordnat par av reella tal. Om P är en punkt skriver vi $P = (x, y)$ eller $P(x, y)$ där $x, y \in \mathbb{R}$. Vi kommer även att använda notationen $P_x$och P_y för de tal som utgör punkten P. Mängden av alla punkter betecknas $\mathbb{R}^2$, vilket är ett kortare skrivsätt för $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, produktmängden av $\mathbb{R}$ och $\mathbb{R}$. ▲

Med denna definition av punkt, visar det sig rent logiskt att vi inte behöver det som brukar kallas koordinatsystem (två axlar som man kan använda för att pricka in punkter). Den enda användningen vi kommer att ha av ett koordinatsystem är då vi vill göra oss en bild av vår värld (mängden punkter). Då kommer vi rita de två axlarna på sedvanligt sätt.

Man kan naturligtvis göra en detaljerad framställning av vad som menas med ett koordinatsystem också. Med en sådan framställning av geometrin, är punkter inte definierade som par av tal, utan som element i en mängd. Koordinatsystemet införs då för att indexera punkterna på lämpligt sätt. Detaljerna för denna framställning kräver dock några matematiska begrepp som det inte finns tid att ta upp just nu.

Man skulle kunna göra ett mellanting mellan de två framställningarna av geometrin, som introducerar lite av andemeningen i den mer avancerade framställningen. Vi får se om kommande versioner av denna text kommer att inkludera detta.

4 Avstånd

Det finns en generell teori för avståndsbegrepp. Här kommer vi dock att använda den Euklidiska metriken.

4.1 Euklidiska metriken

Vi gör följande definition.

Definition 4.1.1. *Avståndet* mellan punkterna P och Q ges av

$$d(P,Q) = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}. \tag{4.1}$$

Vi inför också notationen $d^2(P,Q) \equiv (d(P,Q))^2$ och benämner detta det *kvadratiska avståndet* mellan punkterna P och Q. ▲

Du kanske känner igen uttrycket (4.1) ovan från Pythagoras sats. Det är dock mycket viktigt att du förstår att detta inte har någon ting med Pythagoras sats att göra över huvud taget! Inte rent logiskt i alla fall. Pythagoras sats är något som rör rätvinkliga trianglar, men vi har ännu inte ens definierat vad som menas med linje, än mindre triangel, vinkel eller rät vinkel.

Det är förvisso ingen slump att uttrycket liknar Pythagoras sats. Senare i denna text (möjligen i kommande versioner) skall vi bevisa Pythagoras sats, och då måste vi använda (4.1).

Exempel 4.1.2. Avståndet mellan punkterna $P(8,9)$ och $Q(3,5)$ är

$$d(P,Q) = \sqrt{(3-8)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}.$$

▲

I den Euklidiska geometrin är det mycket viktigt att kunna konstruera mittpunkten på en given sträcka. Det kan vara bra att ha en metod att beräkna den punkt som befinner sig mellan två punkter även i detta axiomatiska system.

Sats 4.1.3. *Den punkt som befinner sig lika långt från A och B och som minimerar detta avstånd har koordinaterna*

$$\left(\frac{A_x + B_x}{2}, \frac{A_y + B_y}{2}\right). \tag{4.2}$$

Bevis. Den eftersökta punkten, som vi kallar M, måste ha två egenskaper: Dels att dess avstånd till A och B är lika, dels att detta avstånd är halva avståndet mellan A och B. Tecknat som ekvationer får vi

$$\begin{aligned} d^2(A,M) &= d^2(M,B) \\ d^2(A,M) &= \frac{1}{4} d^2(A,B) \end{aligned}$$

Med (4.1) får vi

$$\begin{aligned} (A_x - M_x)^2 + (A_y - M_y)^2 &= (M_x - B_x)^2 + (M_y - B_y)^2 \\ (A_x - M_x)^2 + (A_y - M_y)^2 &= \frac{1}{4}\left((A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2\right) \end{aligned}$$

Man kan visa att detta ekvationssystem har den eftersökta lösningen (4.2). □

4.2 Övningar

1. Beräkna avståndet mellan punkterna $(-100, 2)$ och $(35, 7)$.
2. Ange en punkt på avståndet 5 ifrån punkten $(100, 100)$.
3. Hur många lösningar finns det till förra övningen?
4. Ange en punkt på avståndet 0 från origo.

5 Linjer

5.1 Definition på k-form

En möjlig definition av en *linje* är att det är lösningsmängden till en ekvation av typen $y = kx + m$. Konstanten k benämns linjens *riktningskoefficient*. Den andra konstanten, m, har inget annat vedertaget namn än linjens m-värde.

Som namnet antyder anger k riktningen för linjen. Teorin för linjer på k-form hänger ihop med grafen till polynomfunktioner av grad ett: linjen kan betraktas som grafen till funktionen $y(x) = kx + m$, där högerledet är just ett polynom av grad ett. Det som skiljer är att en linje kan vara vertikal. Vi måste därför ha en bättre definition.

5.2 Allmän definition

Vi vill inte använda uttrycket $y = kx + m$ som definition för en linje, eftersom det finns objekt som vi normalt anser vara linjer som inte går att skriva så.

En linje kan luta upp ($k > 0$) eller ner ($k < 0$). Om linjen är horisontell är $k = 0$ och vi får helt enkelt ekvationen $y = m$. Denna ekvation är dock en ekvation med *två* obekanta! Tänk på den som $y = 0x + m$! Lösningen är alla par (x, y) som uppfyller villkoret $y = m$. Eftersom det inte finns något krav på x uppfylls ekvationen av alla punkter där $y = m$ och x får vara vilket tal som helst. Lösningsmängden blir en horisontell linje.

Det fall som inte täcks är den vertikala linjen. Med samma resonemang som ovan gäller att dess ekvation är $x = l$. Notera att denna linje inte är grafen till någon funktion!

En sann matematiker är dock inte nöjd med att ha två definitioner av ett och samma begrepp! Ett sätt att sammanföra fallet $y = kx+m$ med fallet $x = l$ ges i definitionen nedan.

Definition 5.2.1. En *linje* är lösningsmängden till en ekvation av typen

$$ax + by + c = 0 \tag{5.1}$$

där $(a, b) \neq (0, 0)$. ▲

Denna definition täcker alla fall. I själva verket har vi använt orden horisontell och vertikal, endast med hänvisning till vår vardagliga uppfattning om dessa begrepp. Vi ger nu en precis definition.

Definition 5.2.2. En linje $ax + by + c = 0$ är *horisontell* om $a = 0$, och *vertikal* om $b = 0$. ▲

Att uttrycka en linje på formen $ax + by + c = 0$ brukar benämnas att skriva linjen på *allmän form*. Att lösa ut y ur detta uttryck (vilket går om $b \neq 0$) ger ett uttryck på formen $y = kx + m$, vilket brukar benämnas *k-form*.

Sats 5.2.3. *En icke-vertikal linje går att skiva på formen*

$$y = kx + m$$

Bevis. Det som måste bevisas är att talen k och m existerar och är entydiga. Om man löser ut y ur (5.1) finner man

$$k = -\frac{a}{b},$$
$$m = -\frac{c}{b}.$$

□

Beviset ovan var kanske inte så knepigt. Däremot kanske du har svårt att greppa att det faktiskt är ett bevis. Vi skall dock senare se på fall där det inte är lika lätt att se att två uttryck representerar samma objekt (i detta fall samma linje). Denna lilla sats och dess bevis får tjäna som uppvärmning inför dessa fall.

Följande sats är mycket användbar.

Sats 5.2.4. *Om punkterna* (x_1, y_1) *och* (x_2, y_2) *tillhör linjen* $y = kx + m$ *gäller*

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{5.2}$$

Observera att omvändningen inte gäller! Två punkter som uppfyller (5.2) behöver inte nödvändigtvis ligga på linjen.

5.3 Vinkelräta linjer

Euklides definierade att två linjer är vinkelräta om sidovinklarna som uppkommer i deras skärningspunkt är lika. Det är inte en användbar definition för oss. Först och främst har vi inte definierat vad som menas med en vinkel, så vi kan inte använda den rakt av. Dessutom visar det sig mycket krångligt att gå vägen via definitionen av en vinkel (om det ens går!).

Vi gör istället följande definition.

Definition 5.3.1. Linjerna $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ och $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ är *vinkelräta* om $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. ▲

Om linjerna går att skriva i k-form (om ingen av dem är vertikal) kan man visa att följande gäller.

Sats 5.3.2. *För två vinkelräta linjer gäller* $k_1 \cdot k_2 = -1$.

5.4 Avstånd till punkter

För avståndet mellan en linje och en punkt gör vi följande naturliga definition.

Definition 5.4.1. *Avståndet* mellan en linje och en punkt är det kortaste avståndet mellan linjen och punkten. ▲

I det allmänna uttrycket för en linje, $ax + by + c = 0$, finns en enkel geometrisk tolkning av a och b. Om vi bildar en vektor med komponenterna a och b kommer den att vara vinkelrät mot linjen. Vi går inte närmare in på den axiomatiska definitionen av en vektor än så.

Talet c har också en geometrisk tolkning. Man kan visa följande sats.

Sats 5.4.2. *Avståndet mellan en linje $ax + by + c = 0$ och en punkt P ges av*

$$\frac{|aP_x + bP_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{5.3}$$

Vi visar inte satsen här, bland annat för att det krävs kunskaper från Matematik 3c.

Ett steg på vägen är i alla fall följande resultat.

Sats 5.4.3. *Låt Q vara den punkt på linjen $ax+by+c = 0$ som är närmast punkten P. Då är linjen genom P och Q vinkelrät mot $ax + by + c = 0$.*

Vi kan alltid multiplicera båda led i ekvationen för en linje med något så att $a^2+b^2 = 1$. Om vi valt a och b så ger (5.3) att c blir avståndet mellan linjen och origo.

5.5 Linjesegment, trianglar och polygoner

Vi gör följande naturliga definitioner.

Definition 5.5.1. Två olika punkter A och B definierar ett *linjesegment* som är mängden av alla punkter mellan de två punkterna längs den linje som går genom punkterna. Vi betecknar detta linjesegment AB. ▲

Definition 5.5.2. En *triangel* definieras av de tre linjesegment som definieras av tre punkter som inte ligger på samma linje. Linjesegmenten benämns triangelns *sidor*. En triangel är *rätvinklig* om två av sidorna är vinkelräta. En triangel är *likbent* om två sidor är lika långa och *liksidig* om alla tre är lika långa. ▲

Notera att vi inte kan avgöra om en triangel är trubbvinklig eller spetsvinklig eftersom vi inte har definierat ett vinkelbegrepp ännu. Av samma anledning kan vi inte ens formulera påståendet att vinkelsumman i en triangel är två räta, än mindre försöka bevisa detta påstående.

Definition 5.5.3. En *månghörning*, *polygon* eller *n-hörning*, definieras av de linjesegment som definieras genom två på varandra följande par i en ordnad följd av punkter (n st), där den sista punkten paras till den första. Linjesegmenten får inte skära varandra. ▲

5.6 Pythagoras sats

Som nämndes i avsnitt 4.1 har metrikens uteseende inget att göra med Pythagoras sats. För att belysa detta måste vi se hur den satsen är formulerad.

Sats 5.6.1. *Om och endast om en triangel är rätvinklig, gäller att kvadraten av den längsta sidans längd är lika med summan av kvadraterna av de övriga sidornas längder.*

Bevis. Vi låter triangeln ges av linjesegmenten AB, AC och CB.

Vi inför beteckningarna

$$\begin{aligned} a^2 &= d^2(B,C) \\ b^2 &= d^2(C,A) \\ c^2 &= d^2(A,B) \end{aligned}$$

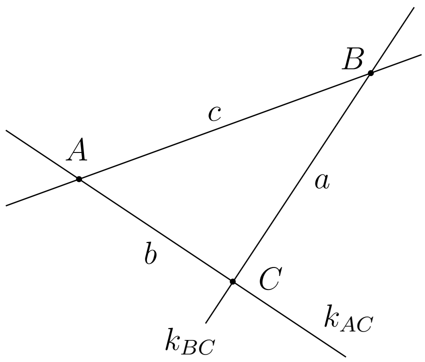
för (de kvadratiska) längderna av triangelns sidor.

Antag för resonemangets skull att det är sida AC som är, eller skall visas vara, vinkelrät mot sida BC, vilket ger att den räta vinklen alltså är i punkt C. Notera att motstående sida har längd c.

Antag nu att varken AC eller BC är vertikal. Då går motsvarande linjer att skriva på k-form.

Låt k_{AC} vara riktningskoefficient för sida AC och på motsvarande sätt för k_{BC}.

Figuren nedan visar situationen.



Det som skall visas är alltså att

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad k_{AC} \cdot k_{BC} = -1.$$

Nu kan man definitivt se att metriken och Pythagoras sats inte är samma sak. Vi måste ju använda metriken för att formulera Pythagoras sats, så metriken måste vara något annat än Pythagoras sats!

Eftersom

$$\begin{aligned} k_{AC} &= \frac{A_y - C_y}{A_x - C_x} \\ k_{BC} &= \frac{B_y - C_y}{B_x - C_x} \end{aligned}$$

fås alltså att

$$(B_x - C_x)^2 + (B_y - C_y)^2 + (A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{A_y - C_y}{A_x - C_x} \cdot \frac{B_y - C_y}{B_x - C_x} = -1$$

skall bevisas.

Det är lättare att se likheten om vi flyttar alla termer till vänsterledet i det första uttrycket

$$(B_x - C_x)^2 + (B_y - C_y)^2 + (A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 - (A_x - B_x)^2 - (A_y - B_y)^2 = 0$$

och multiplicerar båda led i det andra med nämnaren och flyttar alla termer till vänsterledet även här. Då fås

$$(A_y - C_y)(B_y - C_y) + (A_x - C_x)(B_x - C_x) = 0.$$

Utvecklar man alla kvadrater i det första uttrycket får man (efter förenkling)

$$2\,C_x^2 - 2\,B_x\,C_x - 2\,B_y\,C_y + 2\,C_y^2 - 2\,A_y\,C_y + 2\,A_y\,B_y - 2\,A_x\,C_x + 2\,A_x\,B_x = 0,$$

och multiplicerar man ihop faktorerna i det andra får man (efter förenkling)

$$C_x^2 - B_x\,C_x - B_y\,C_y + C_y^2 - A_y\,C_y + A_y\,B_y - A_x\,C_x + A_x\,B_x = 0$$

vilket visar att uttrycken är ekvivalenta då det endast skiljer en faktor 2.

Om en av AC och BC är horisontell är den andra vertikal om triangeln är rätvinklig, och $c^2 = a^2 + b^2$ följer direkt ur metriken.

Antag nu att det är BC som är vertikal och att $c^2 = a^2 + b^2$. I detta fall måste det visas att AC är horisontell, vilket betyder att $A_y - C_y = 0$ skall visas gälla.

Det är därför smidigt att studera $b^2 = c^2 - a^2$ vilket är

$$(A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 - (B_x - C_x)^2 - (B_y - C_y)^2.$$

Eftersom BC är vertikal gäller $B_x - C_x = 0$ vilket gör att de två första termerna i VL och HL är lika och att den tredje termen i HL är noll. Kvar blir

$$\begin{aligned}
(A_y - C_y)^2 &= (A_y - B_y)^2 - (B_y - C_y)^2 \\
&= A_y^2 - 2A_yB_y + B_y^2 - B_y^2 + 2B_yC_y - C_y^2 \\
&= A_y^2 - C_y^2 - 2B_y(A_y - C_y) \\
&= (A_y - C_y)(A_y + C_y) - 2B_y(A_y - C_y) \\
&= (A_y - C_y)(A_y + C_y - 2B_y)
\end{aligned}$$

Om $A_y = C_y$ gäller likheten och vi är klara. Om $A_y \neq C_y$ kan vi kancellera en faktor $(A_y - C_y)$ från vardera led. Kvar blir

$$\begin{aligned}
A_y - C_y &= A_y + C_y - 2B_y \\
-2C_y &= -2B_y
\end{aligned}$$

vilket ger $B_y = C_y$. Det är dock inte möjligt eftersom B och C då skulle vara samma punkt eftersom vi redan antagit att $B_x = C_x$.

Nu har Pythagoras sats visats åt båda håll och i alla tänkbara fall. $\square$

5.7 Vinklar

Vinkelbegreppet visar sig vara knepigt med de förkunskaper som förutsätts här[1]. Ett mått på hur mycket en linje lutar är linjens riktningskoefficient. Vi gör ett försök till definition.

Definition 5.7.1. *Vinkeln* θ mellan en linje med riktningskoefficient k och x-axeln ges av

$$\tan(\theta) = k$$

För en vertikal linje definieras $\theta = 90°$. ▲

Denna definition ger dock inte entydighet. Vi vill gärna ha en definition som ger vinklar i intervallet $0° \leq \theta < 360°$. Vi gör därför en bättre definition.

Definition 5.7.2. Låt P vara en punkt på en cirkel med radie 1 (enhetscirkeln). Då definieras vinkeln θ mellan x-axeln och linjen som går genom P och origo genom

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= P_x\\ \sin(\theta) &= P_y.\end{aligned}$$

▲

Det finns flera problem med båda dessa definitioner. Först och främst har vi inte definierat vad som menas med funktionerna $\sin(v)$, $\cos(v)$ eller $\tan(v)$. I själva verket tas oftast 5.7.2 som definition av just $\sin(v)$ och $\cos(v)$, men då måste man ju återigen veta vad som menas med en vinkel.

Ett annat problem är att vi inte vet vad som menas med en cirkel ännu. Det görs förvisso i nästa avsnitt så det är inget större problem.

Värre är att vi inte har så stor användning av definitionerna. Vad blir till exempel vinkeln mellan en linje med riktningskoefficient k_1 och en annan med riktningskoefficient k_2? För att reda ut det krävs en hel del som visas i Matematik 4.

För att den andra definitionen skall vara tillämpbar måste vi på något vis relatera en punkt på enhetscirkeln till en linje.

5.8 Diofantiska ekvationer

En Diofantisk ekvation är en ekvation där koefficienter och lösningar ligger i $\mathbb{Z}$. En (linjär) Diofantisk ekvation är en ekvation av typen

$$a\,X + b\,Y = c$$

där alltså koefficienterna $a, b, c \in \mathbb{Z}$ och lösningarna $X, Y \in \mathbb{Z}$. Vidare antas att a, b och c är relativt prima.

I denna text använder vi versalerna X, Y för att inte förväxla dem med koordinaterna (x, y) för en punkt eftersom $x, y \in \mathbb{R}$.

Euklides algoritm ger en lösning (X_0, Y_0) och alla lösningar ges av

$$\begin{aligned}X_n &= X_0 + b\,n\\ Y_n &= Y_0 - a\,n\end{aligned}$$

[1] Matematik 1c

där $n \in \mathbb{Z}$.

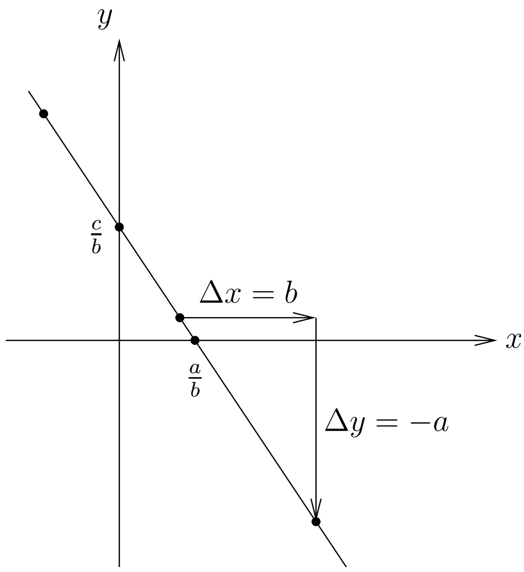
Genom att jämföra lösningarna till $a\,X + b\,Y = c$ med motsvarande linje $a\,x + b\,y = c$ kan vi bevisa följande sats som är användbar i olika sammanhang där Diofantiska ekvationer dyker upp.

För att få ett tydligt resonemang kräver vi att $a, b, c > 0$. Om detta inte gäller fås motsvarande resultat i andra kvadranter än den förta.

Sats 5.8.1. *En linjär Diofantisk ekvation har högst en lösning (X_n, Y_n) i första kvadranten om $a\,b > c$.*

Bevis. Det kvadratiska avståndet mellan två lösningar (X_{n+1}, Y_{n+1}) och (X_n, Y_n) är $a^2 + b^2$. Det kan inte finnas fler än en lösning i första kvadraten om detta avstånd är större än avståndet mellan de punkter där linjen $a\,y + b\,y = c$ skär koordinataxlarna.

Figuren nedan visar detta schematiskt.



Linjen skär axlarna i punkterna $(\frac{c}{a}, 0)$ och $(0, \frac{c}{b})$. Det kvadratiska avstådnet mellan dessa ges av

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2\,b^2}\big(a^2 + b^2\big).$$

Ur detta följer att

$$\big(a^2 + b^2\big) > \frac{c^2}{a^2\,b^2}\big(a^2 + b^2\big)$$

om

$$1 > \frac{c}{a\,b} \Leftrightarrow a\,b > c.$$

□

En tillämpning av detta är att det bara finns ett sätt att dela upp bråk som en summa av andra bråk i stil med exemplet

$$\frac{11}{35} = \frac{X}{5} + \frac{Y}{7}$$

eftersom det ger en Diofantisk ekvation

$$11 = 7\,X + 5\,Y$$

som bara kan ha en lösning där $X, Y > 0$ eftersom $5 \cdot 7 > 11$.

5.9 Övningar

1. Vilka av punkterna $(3, 3)$, $(3, 2)$ och $(126, 43)$ tillhör linjen $x - 3y + 3 = 0$?
2. Bestäm ekvationen för linjen som går genom punkterna $(3, 2)$ och $(5, 6)$. Svara på allmän form.
3. Är linjerna $5x + 3y - 2 = 0$ och $15x - 5y + 27 = 0$ vinkelräta?
4. Ligger punkten $(4, 4)$ på linjesegmentet mellan $(-2, 7)$ och $(7, 2)$?
5. Är triangeln som definieras av punkterna $(3, -2)$, $(4, -5)$ och $(9, 0)$ rätvinklig?
6. Bevisa sats 5.2.4
7. Bevisa sats 5.3.2
8. I texten om Pythagoras sats ges inget detaljerat bevisa av att $a^2 + b^2 = c^2$ i fallet då AC är horisontell och BC är vertikal.
9. Beräkna avståndet mellan linjen $8x - 7y + 18 = 0$ och punkten $(3, 26)$

6 Kvadratiska former

Ekvationen $ax + by + c = 0$ är som sagt en linje. Temat går inte variera speciellt mycket. Inför vi högre ordningar av x och y får vi intressantare punktmängder.

Definition 6.0.1. En *kvadratisk form* är ett uttryck på formen

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{6.1}$$

där minst en av a, b eller c måste vara skild från noll. ▲

Jämför man med andra böcker, så finner man att det i själva verket endast är de tre första termerna i vänsterledet som brukar benämnas kvadratisk form. I brist på bättre namn låter vi här de tre sista termerna hänga med, samt sätter allt lika med noll.

Vi skall strax se att punktmängder som är lösningen till kvadratiska former kan delas in i några specialfall: cirklar, ellipser, hyperblar och parablar. Dessa objekt har olika intressanta egenskaper, till exempel har cirkeln en medelpunkt och en radie. Vi skall nu reda ut följande frågor.

1. Hur hänger dessa egenskaper ihop med konstanterna a till f i (6.1)? Vi skall med andra ord försöka skriva om (6.1) på ett sätt som är mer användbart i de olika fallen.

2. Dessa objekt kan konstrueras geometriskt inom ramen för den Euklidiska geometrin. Dessa konstruktioner kan formuleras om till satser inom koordinatgeometrin. Kan vi bevisa dessa satser?

3. Finns det någon ”tillämpning” av dessa objekt? Vi skall bevisa några geometriska egenskaper för objekten som visat sig vara användbara.

Det är inte säkert att det finns lösningar till alla ekvationer av typen (6.1). Det finns också triviala exempel vars lösningar blir en punkt eller linjer. Exempelvis gäller det $x^2 - y^2 = 0$ vars lösningar är linjerna $y = \pm x$, eller $x^2 = 1$ vars lösningar är två vertikala linjer, eller $x^2 + y^2 = 0$ vars lösning är $(0, 0)$. Ibland benämns dessa typer av lösningar *degenererade lösningar*. Vi är inte intresserade av sådana lösningar och utgår fortsättningsvis från att sådana fall utesluts.

När vi säger ”är lösningsmängden till en kvadratisk form” menar vi alltså fortsättningsvis ”är mängden av alla icke-degenererade lösningar till en kvadratisk form”.

7 Cirklar

7.1 Definition och algebraiska omskrivningar

Definition 7.1.1. En *cirkel* är lösningsmängden till en kvadratisk form som uppfyller villkoren $b = 0$ och $a = c$. ▲

Sats 7.1.2. *En kvadratisk form som definierar en cirkel går att skriva på formen*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{7.1}$$

där cirkeln har sin medelpunkt i (x_0, y_0) *och radie* r*.*

Bevis. Vi kvadratkompletterar (6.1). I en cirkel gäller $a = c$ och $b = 0$. Om vi delar (6.1) med a får vi ett lite enklare uttryck att jobba med.

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}y + \frac{f}{a} &= 0 \\
x^2 + 2 \cdot \frac{d}{2a} \cdot x + \left(\frac{d}{2a}\right)^2 - \left(\frac{d}{2a}\right)^2 + y^2 + \frac{e}{a}y &= -\frac{f}{a} \\
\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + y^2 + \frac{e}{a}y &= \left(\frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{f}{a} \\
\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{e}{2a} \cdot y + \left(\frac{e}{2a}\right)^2 - \left(\frac{e}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{f}{a} \\
\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{e}{2a}\right)^2 - \frac{f}{a}
\end{aligned}$$

Vi ser att vi får det eftersökta uttrycket med

$$\begin{aligned}
x_0 &= -\frac{d}{2a} \\
y_0 &= -\frac{e}{2a} \\
r^2 &= \left(\frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{e}{2a}\right)^2 - \frac{f}{a}.
\end{aligned}$$

□

Du ser att x_0 och y_0 endast beror på d, e och a. Detta är anledningen till att vi kunde tillåta oss att ha med d och e i (6.1), eftersom d och e inte kommer att påverka cirkelns form (förändrar den inte till en ellips etc), utan endast var den befinner sig.

7.2 Geometriska egenskaper

Den geometriska konstruktionen av en cirkel är att varje punkt på cirkeln skall ha samma avstånd till cirkelns medelpunkt. Vi visar nu att detta gäller även i koordinatgeometrin.

Sats 7.2.1. *Avståndet mellan en punkt på en cirkel och punkten* (x_0, y_0) *är* r*.*

Bevis. Låt $P(x, y)$ vara en godtycklig punkt på cirkeln, och låt oss benämna cirkelns medelpunkt $M = (x_0, y_0)$. Det kvadratiska avståndet mellan P och M är

$$d^2(P, M) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

där sats 7.1.2 har använts i sista likheten. □

7.3 Exempel och tillämpningar

Den kanske bästa tillämpningen av cirkeln är väl hjulet.

Exempel 7.3.1. Skärningspunkten mellan en linje och en cirkel

Bestäm skärningspunkterna mellan cirkeln $(x-3)^2+(y+1)^2=4^2$ och linjen $4x-2y+2=0$.

Lösning: Vi löser ut y ur ekvationen för linjen och får $y=2x+1$. Sätter vi in det i ekvationen för cirkeln får vi

$$(2x+2)^2+(x-3)^2=16.$$

Denna ekvation har lösningarna

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 3/5. \end{aligned}$$

Dessa ger oss

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 \\ y_2 &= 11/5. \end{aligned}$$

Skärningspunkterna är $(-1,-1)$ och $(3/5, 11/5)$. ▲

Exempel 7.3.2. Skärningspunkterna för två cirklar

Bestäm skärningspunkterna för cirklarna $(x-2)^2+(y+1)^2=4^2$ och $(x+2)^2+(y-2)^2=3^2$.

Lösning: Vi utvecklar kvadraterna och får

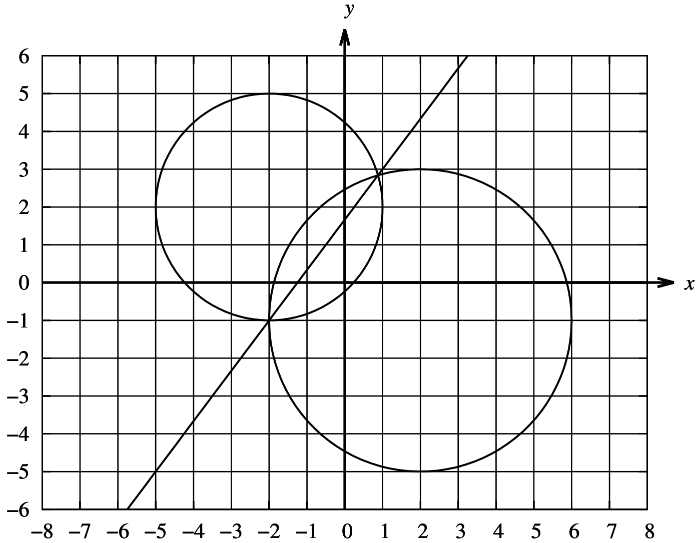
$$\begin{aligned} y^2+2y+x^2-4x+5 &= 4^2 \\ y^2-4y+x^2+4x+8 &= 3^3. \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem har två obekanta, men det är två ekvationer av grad två. Det är alltså inte självklart att det finns två lösningar, eller hur vi hittar dem. Vi förstår dock att det finns ingen, en eller två lösningar om cirklarna inte skär varandra, tangerar varandra respektive skär varandra.

Om subtraherar dessa från varandra får vi

$$6y-8x-3=7.$$

De eftersökta lösningarna kommer ligga längs denna linje. I grafen nedan visas cirklarna och linjen.



Om vi löser ut y ur uttrycket för linjen kan vi dock sätta in det i någon av ekvationerna för cirklarna. Det blir en andragradsekvation som har lösningarna

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= 22/25. \end{aligned}$$

Dessa ger oss

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 \\ y_2 &= 71/25. \end{aligned}$$

Skärningspunkterna är $(-2,-1)$ och $(22/25, 71/25)$. ▲

7.4 Övningar

1. Bestäm ekvationen för cirkeln som har sin medelpunkt i $(3,2)$ och radie 4. Svara på allmän form.
2. Skriv cirkeln $x^2 + y^2 + 3x + 4y + 3 = 0$ på formen (7.1).
3. Två cirklar ges av $x^2 + y^2 - 16 = 0$ och $x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0$.
   a) Vilka radier har cirklarna?
   b) Vad är avståndet mellan cirklarnas medelpunkter?
4. Bestäm skärningspunkterna mellan linjen $2y + 3x + 13 = 0$ och cirkeln $(y + 8)^2 + (x + 1)^2 = 9$.
5. Bestäm skärningspunkterna mellan linjen $3y - 2x - 10 = 0$ och cirkeln $(y + 3)^2 + (x + 2)^2 = 16$.
6. Bestäm k så att linjen $y = kx + 3$ tangerar cirkeln $(y + 3)^2 + (x + 2)^2 = 16$.
7. Bestäm skärningspunkterna för cirklarna $y^2 - 4y + x^2 + 8x + 20 = 16$ och $y^2 + 4y + x^2 - 2x + 5 = 25$
8. Bestäm skärningspunkterna för cirklarna $y^2 - 2y + x^2 + 8x + 17 = 16$ och $y^2 - 2y + x^2 + 4x + 5 = 9$

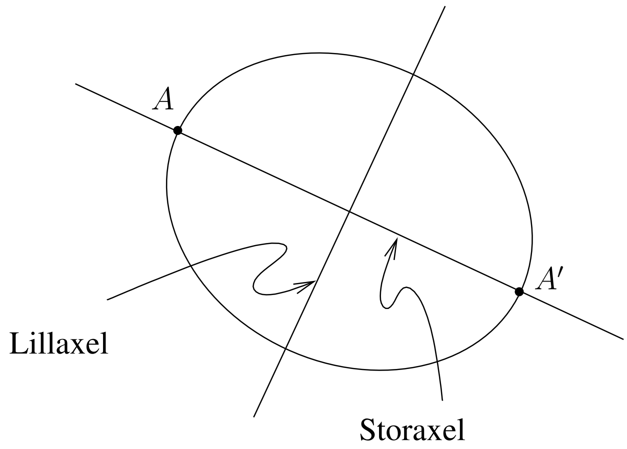
8 Ellipser

8.1 Definition och algebraiska omskrivningar

Cirkeln är i själva verket ett specialfall av ellipsen.

Definition 8.1.1. En *ellips* är lösningsmängden till en kvadratisk form som uppfyller villkoret $b^2 < 4ac$. ▲

Definition 8.1.2. Låt A och A' vara de två punkter som befinner sig längst från varandra på en ellips. Linjen genom A och A' benämns ellipsens *storaxel* (eng: major axis). Den linje som går genom mittpunkten på sträckan mellan A och A', och vinkelrät mot storaxeln benämns ellipsens *lillaxel* (eng: minor axis). Ellipsens *medelpunkt* är skärningspunkten för axlarna. ▲



Vi kommer att ha nytta av följande definition.

Definition 8.1.3. En ellips där $b = 0$ är en *rak*[2] ellips. ▲

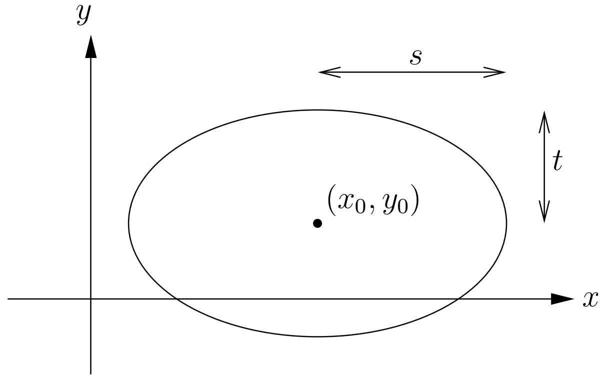
Sats 8.1.4. *En rak ellips har axlar parallella med koordinataxlarna och går att skriva på formen*

$$\left(\frac{x - x_0}{s}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{t}\right)^2 = 1. \tag{8.1}$$

Ellipsens axlar är linjerna $x = x_0$ och $y = y_0$ och medelpunkten är (x_0, y_0).

Beviset är en simpel kvadratkomplettering av (6.1), precis som beviset av sats 7.1.2.

Definition 8.1.5. För en rak ellips definirar vi ellipsens *bredd* till $2s$ och *höjd* till $2t$ med s och t från satsen ovan. ▲



[2]OBS! Detta är inte en vedertagen definition i allmänna matematiska texter, men lämpar sig väl för våra syften.

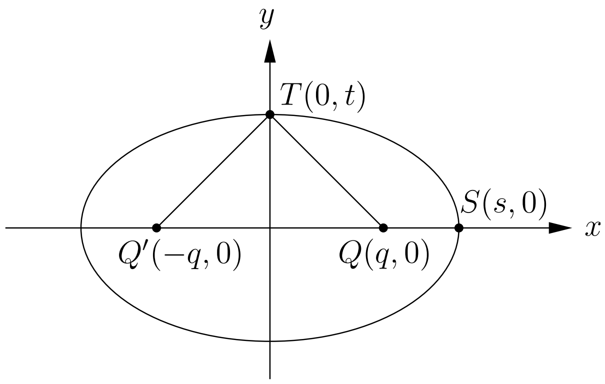
8.2 Geometriska egenskaper

I den Euklidiska geometrin definieras en ellips från två punkter på så sätt att summan av avståndet från en punkt på ellipsen till dessa två punkter skall vara konstant.

Att detta gäller även i koordinatgeometrin måste visas.

Sats 8.2.1. *För en given ellips finns det två punkter sådana att summan av avståndet från en godtycklig punkt på ellipsen till de två punkterna är samma för alla punkter på ellipsen.*

Definition 8.2.2. Punkter som avses i satsen ovan benämns ellipsens *fokalpunkter.*
▲



Bevis. Bevis i specialfallet $b = x_0 = y_0 = 0$: Teckna fokalpunkterna $Q(q,0)$ och $Q'(-q,0)$ och teckna

$$d(S,Q) + d(S,Q') = d(Q,T) + d(Q',T).$$

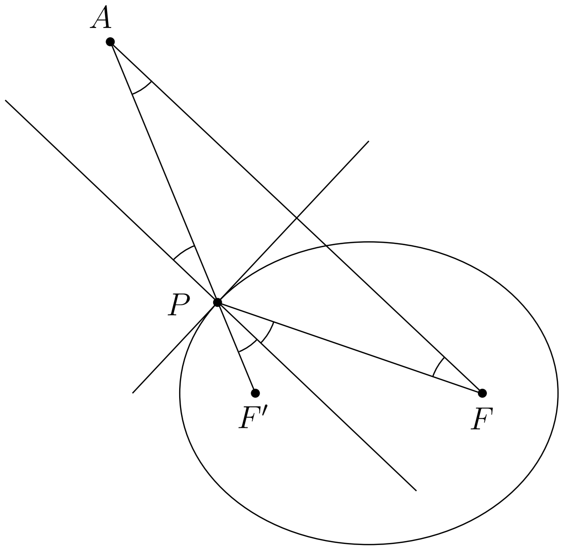
Vi noterar att $d(Q,T) = d(Q',T)$ av symmetriskäl. Vi får då

$$\begin{aligned}
\sqrt{(s-q)^2 + (0-0)^2} + \sqrt{(s-(-q))^2 + (0-0)^2} &= 2\sqrt{(0-(-q))^2 + (t-0)^2} \\
\sqrt{(s-q)^2} + \sqrt{(s+q)^2} &= 2\sqrt{q^2+t^2} \\
s - q + (s+q) &= 2\sqrt{q^2+t^2} \\
s^2 &= q^2 + t^2
\end{aligned}$$

□

En väldigt viktig egenskap som används i många tekniska sammanhang beskrivs i följande sats.

Sats 8.2.3. *Linjerna från fokalpunkterna till en godtycklig punkt P på ellipsen bildar lika stora vinklar till normalen till ellipsen i punkt P.*



Eftersom vi inte har gjort någon användbar definition av vinkel kan vi inte visa denna sats inom ramen för koordinatgeometrin. Däremot är kan man motivera att detta gäller relarivt enkelt inom den Euklidiska geometrin.

Bevis. **OBS! Motivering inom ramen för den Euklidiska geometrin**

I figuren ovan visas en ellips där vi dragit tangent och normal i punkten P. Vi speglar F i tangenten så att vi får en likbent triangel PAF. Genom sin konstruktion är AF parallell med ellipsens normal i P. Därför är alla vinklar som är markerade i figuren lika. □

Anledningen till att detta inte är ett bevis är att det bygger på att vi kan konstruera normalen och tangenten i punkten P. Hur detta skulle gå till är oklart.

8.3 Exempel och tillämpningar

Tillämpningar av ellipsen bygger ofta på sats 8.2.3.

Ett annan viktig faktum rörande ellipser är att planeterna rör sig i banor som beskrivs av ellipser, där solen ligger i banornas ena fokalpunkt. Detta är en av Keplers lagar.

Exempel 8.3.1. Skärningspunkterna mellan en ellips och en linje

Denna typ av problem löser man på precis samma sätt som motsvarande problem med cirkeln. Ellipsen måste inte ens vara rak för att man skall få en enkel andragradsekvation. ▲

Exempel 8.3.2. Skärningspunkterna mellan två ellipser

Denna typ av problem blir dock inte lösbart. Låt oss söka skärningspunkterna mellan

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{6}\right)^2 = 1$$

och

$$\left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{3}\right)^2 = 1.$$

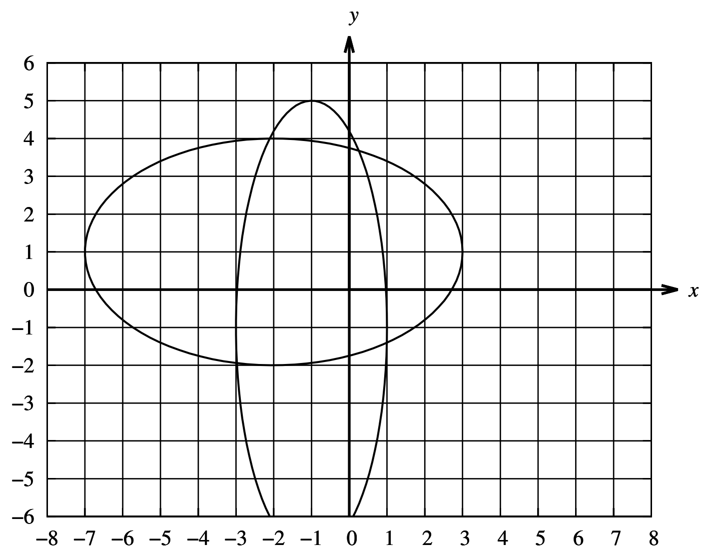
Löser vi ut y ur den första ekvationen får vi

$$y = -1 \pm -3\sqrt{-x^2 - 2x + 3}.$$

Sätter vi in detta i den andra får vi

$$\pm 300\sqrt{-x^2 - 2x + 3} - 216x^2 - 414x + 811 = 225.$$

Detta går att skriva om till en ekvation av grad fyra. Det finns också fyra skärningspunkter, vilket visas i figuren nedan.



▲

8.4 Övningar

1. Skriv ellipsen $\frac{y^2}{4} + y + \frac{x^2}{9} - \frac{4\,x}{9} + \frac{13}{9} = 1$ på formen (8.1).
2. Bestäm fokalpunkterna till ellipsen $\frac{(y+2)^2}{25} + \frac{(x-1)^2}{9} = 1$
3. Beräkna skärningspunkerna för ellipsen $\frac{(y-2)^2}{25} + \frac{(x+1)^2}{9} = 1$ och linjen $y = \frac{x}{2} + 4$.
4. Bevisa sats 8.1.4.

9 Stötar

Som en intressant tillämpning av teorin rörande ellipser kan vi studera stötar mellan två kroppar som glider utan friktion.

Före kollisionen har kropparna den totala kinetiska energin respektive rörelsemängden

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \\ p &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{aligned}$$

vilket i ett v_1-v_2-diagram är en ellips och en linje.

I ett exempel med där $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg samt $v_1 = 4\,\mathrm{m/s}$ och $v_2 = -1\,\mathrm{m/s}$ fås

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{2 \cdot 4^2}{2} + \frac{3(-1)^2}{2} = \frac{35}{2} \\ p &= 2 \cdot 4 + 3(-1) = 5. \end{aligned}$$

9.1 Elastisk stöt

Om stöten är elastisk bevaras både rörelsemängd och energi. Efter kollisionen har kropparna hastigheterna v_1' respektive v_2'. Att söka dessa innebär att vi skall lösa ekvationssystemet

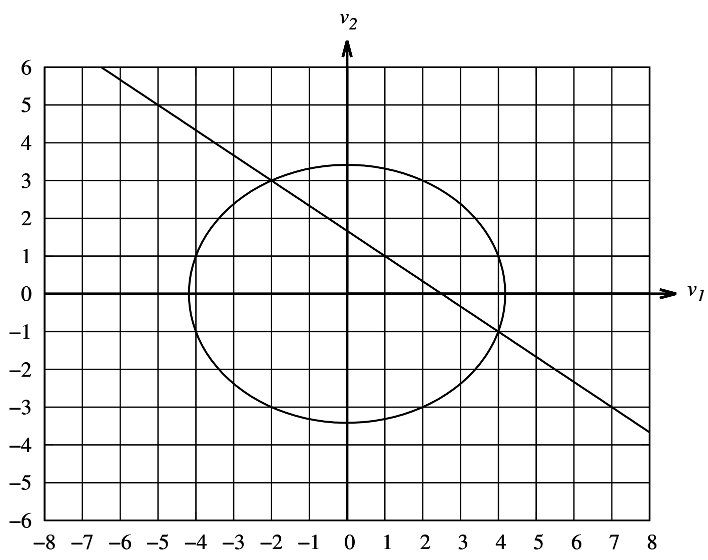
$$\begin{cases} \frac{35}{2} = \frac{2v_1'^2}{2} + \frac{3v_2'^2}{2} \\ 5 = 3v_1' + 2v_2' \end{cases}$$

vilket grafiskt motsvarar att vi skall beräkna skärningspunkterna mellan en ellips och en linje.

Ekvationssystemet har två lösningar. Dels måste utgångssituationen uppfylla systemet, dels fås en ny lösning

$$\begin{aligned} v_1' &= -2\,\mathrm{m/s} \\ v_2' &= 3\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Grafen nedan visar kurvorna.



Nu kan vi fråga oss vad som egentligen händer under själva kollisionen. Rörelsemängden är bevarad, den omvandlas inte till någon annan form under tiden kollisionen sker.

Energin däremot övergår förmodligen till någon sorts potentiell energi (som vi kan tänka oss lagras i en fjäder) medan kollisionen pågår. Vid kollisionens slut har all energi återigen blivit rörelseenergi.

Att rörelseenergi förloras under tiden kollisionen pågår kan grafiskt tolkas som att ellipsen krymper. Systemet måste hela tiden befinna sig på rörelsemängdslinjen, så elliplsen kan inte krypa hur mycket som helst. Hastigheterna ändras inte heller i hopp från ett värde till ett annat. Den första kroppens hastighet måste kontinuerligt anta alla värden mellan 4 och -2 och den andra kroppens hastihet antar alla värden mellan -1 och 3.

Det tillfälle där som mest energi har lagrats som potentiell enerergi måste representeras av en ellips som precis tangerar linjen.

Detta motsvarar att bestämma ett E_k så att

$$\begin{cases} E_k &= \dfrac{2v_1^2}{2} + \dfrac{3v_2^2}{2} \\ 5 &= 2v_1 + 3v_2 \end{cases}$$

har precis en lösning.

Skriver vi om systemet till

$$\begin{cases} 2E_k &= 2v_1^2 + 3v_2^2 \\ v_2 &= \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}v_1. \end{cases}$$

Sätter vi in v_2 i den första ekvationen får vi

$$\begin{aligned} 2E_k &= 2v_1^2 + 3\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}v_1\right)^2 \\ 2E_k &= 2v_1^2 + \frac{25}{3} - \frac{20}{3}v_1 + \frac{4}{3}v_1^2 \\ 0 &= \frac{10}{3}v_1^2 - \frac{20}{3}v_1 + \frac{25}{3} - 2E_k \\ 0 &= v_1^2 - 2v_1 + \frac{25}{10} - \frac{3E_k}{5} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \pm \sqrt{1 - \frac{25}{10} + \frac{3E_k}{5}} \\ v_1 &= 1 \pm \sqrt{\frac{-15 + 6E_k}{10}}. \end{aligned}$$

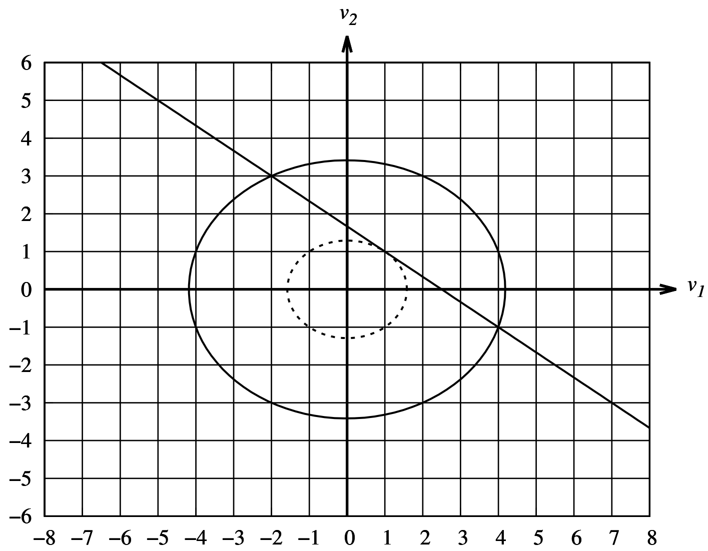
För att bara få en lösning, så att linjen tangerar ellipsen, måste diskriminanten vara noll. Det ger

$$E_k = \frac{5}{2}.$$

Jämfört med utgångssituationens energi lagras alltså $\Delta E = 15$ J som potentiell energi i fjädern.

När detta händer är $v_1 = 1\,\mathrm{m/s}$ vilket ger $v_2 = 1\,\mathrm{m/s}$.

Den streckande kurvan i figuren nedan visar energiellipsen då systemet har som minst röreselenergi.



Energiellipsen har alltså krypt så att den tangerar linjen i punkten $(1, 1)$.

Det är ingen slump att $v_1 = v_2$ då detta sker. Så måste det vara eftersom kropparna då momentant sitter ihop och därför måste röra sig med samma hastighet.

Detta är också hastigheten för systemets tyngdpunkt, v_{CM}. Hela systemets rörelsemängd ges av

$$p = (m_1 + m_2)v_{CM}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)v_{CM} &= m_1v_1 + m_2v_2 \\ v_{CM} &= \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1)}{2 + 3} = 1\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Om man skulle byta referenssystem så att man följer med kropparna i denna hastighet, skulle den totala röreslemänden vara noll eftersom $v_{CM} = 0\,\mathrm{m/s}$ i detta system.

Linjen skulle då gå genom origo och ellipsen skulle krypa till en punkt i origo under kollisionen. Det betyder att kropparna i detta system skulle stå still momentant innan de studsar från varandra.

9.2 Fullständigt oelastisk stöt

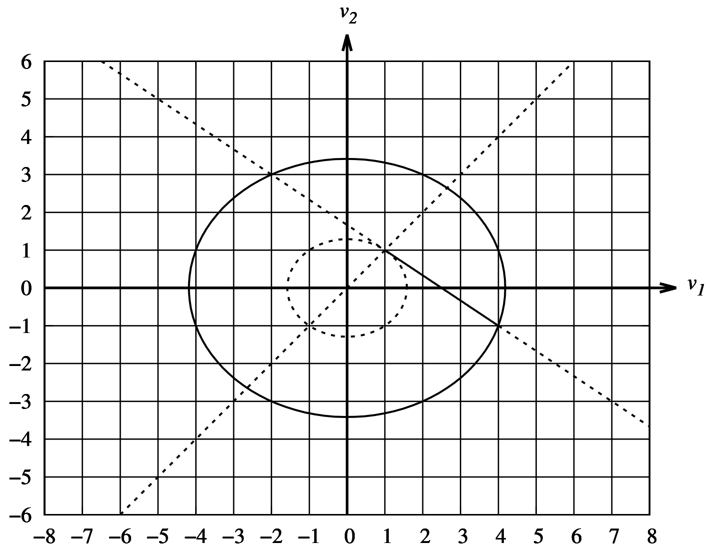
Om stöten är fullständigt oelastisk sitter kropparna ihop efter stöten. Det betyder att de måste färdas samma hastighet efter stöten vilket alltså är v_{CM}.

Man kan också tänka på v_{CM} som lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} p &= m_1v_1 + m_2v_2 \\ v_1 &= v_2 \end{cases}$$

eftersom rörelsemängden skall vara bevarad och kropparna skall ha samma hastighet efter kollisionen.

Figuren nedan visar situationen.



Rörelsemängdslinjen och linjen $v_1 = v_2$ skär varandra i den tidigare beräknade v_{CM}. Den energi som går åt för att klumpa ihop kropparna måste vara ΔE som vi beräknade ovan eftersom energiellipsen då tangerar rörelsemängdslinjen.

Den heldragna biten av rörelsemängdslinjen är de hastigheter som kropparna faktiskt antar under kollisionen, från det att de möts till dess de sitter ihop.

10 Parabeln

10.1 Definition och algebraiska omskrivningar

Definition 10.1.1. En *parabel* är lösningsmängden till en kvadratisk form som uppfyller villkoret $b^2 = 4ac$. ▲

Exempel 10.1.2. Ekvationen $y = x^2$ är en parabel. ▲

Definition 10.1.3. En parabel där $b = 0$ är en *rak*[3] parabel. ▲

Eftersom antingen $a = 0$ eller $c = 0$ för raka parablar kan dessa delas upp i två fall.

Sats 10.1.4. *En rak parabel med $c = 0$ kan uttryckas*

$$y = \pm\left(\frac{x - x_s}{s}\right)^2 + t \tag{10.1}$$

där linjen $x = x_s$ är parabelns symmetrilinje. *En rak parabel med $a = 0$ kan utryckas*

$$x = \pm\left(\frac{y - y_s}{t}\right)^2 + s \tag{10.2}$$

där linjen $y = y_s$ är parabelns symmetrilinje.

Parablar har studerats tidigare inom ramen för Matematik 2c, men då oftast som graf till en funktion av typen $f(x) = ax^2 + bx + c$. Det är viktigt att göra skillnad mellan begreppen funktion och kurva. En funktion kan till exempel anta ett minsta värde

[3] OBS! Detta är inte en vedertagen definition i allmänna matematiska texter, men lämpar sig väl för våra syften.

i ett intervall, medan kurvor inte antar värden alls. En funktion kan ha nollställen, medan en kurva kan skära x-axeln.

När man ritar grafen till en funktion är det i själva verket kurvan (lösningsmängden till ekvationen) $y = f(x)$ som ritas.

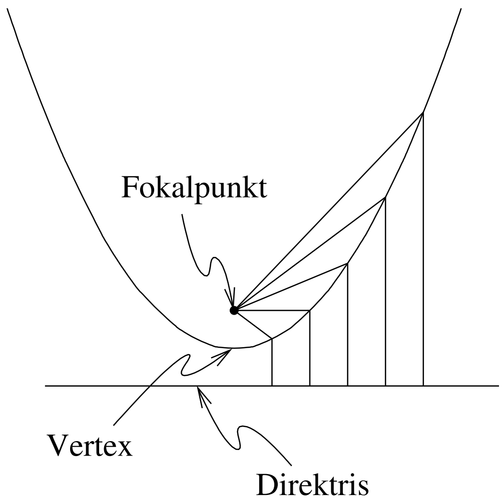
10.2 Geometriska egenskaper

Den geometriska konstruktionen för parabeln beskrivs i följande sats.

Sats 10.2.1. *För en given parabel existerar en punkt A och en linje, sådana att avståndet mellan en godtycklig punkt P på parabeln och A är lika med det kortaste avståndet mellan linjen och P.*

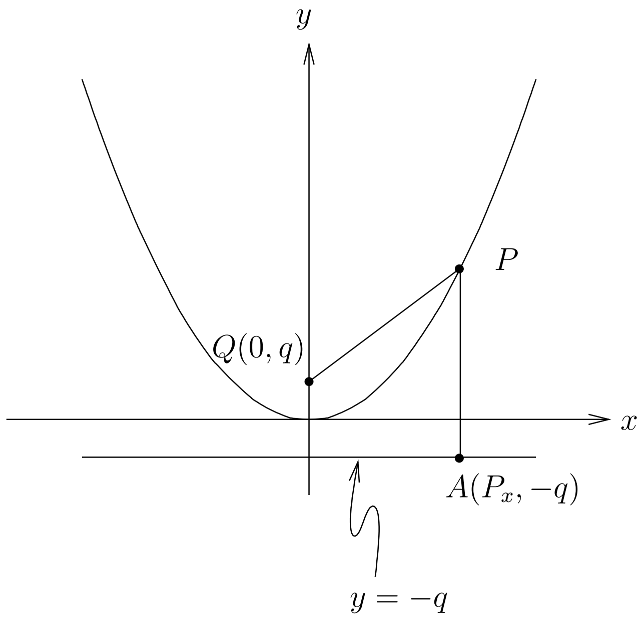
Definition 10.2.2. Punkten som avses i satsen ovan benämns parabelns *fokalpunkt* och linjen benämns parabelns *direktris.* Den punkt på parabeln som är närmast direktrisen benämns parabelns *vertex.* ▲

Figuren nedan visar konstruktionen.



När man konstruerar en parabel i den Euklidiska geometrin, utgår man istället från fokalpunkten och linjen. Vi utgår ju istället från en given parabel (givna värden på a, b, c, d och e) och visar att linjen finns.

Bevis. I fallet $b = d = c = f = 0$ och $e = -1$. Då gäller $y = ax^2$ och vertex ligger i origo. Låt fokalpunkten vara $Q(0, q)$ och direktrisen linjen $y = -q$. Låt punkten A vara den punkt på direktrisen som har samma x-koordinat som P. Vi tecknar avståndet mellan F och P samt mellan P och A. Vi söker alltså q så att dessa är lika. Vi tecknar de kvadratiska avstånden.



Vi får

$$
\begin{aligned}
(P_x-0)^2+(P_y-q)^2 &= (P_x-P_x)^2+(P_y-(-q))^2 \\
P_x^2+(P_y-q)^2 &= (P_y+q)^2 \\
P_x^2+P_y^2-2P_yq+q^2 &= P_y^2+2P_yq+q^2 \\
P_x^2 &= 4P_yq
\end{aligned}
$$

Eftersom vi vet att $y = ax^2$ gäller speciellt $P_y = aP_x^2$ då P är en punkt på parablen. Det ger

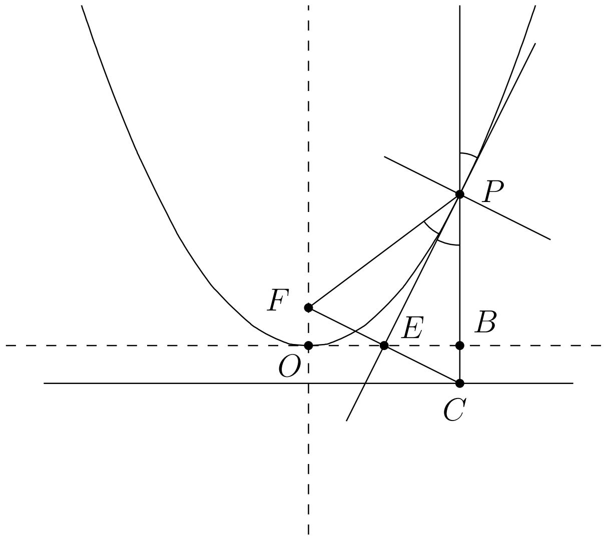
$$
\begin{aligned}
P_x^2 &= 4aP_x^2q \\
\frac{1}{4a} &= q
\end{aligned}
$$

□

Sats 10.2.3. *Linjen från fokalpunkten till en godtycklig punkt P på parabeln, bildar samma vinkel mot normalen till parabeln i P som den linje som är parallell med parabelns symmetrilinje och som går genom P.*

Även denna sats kan vi bara motivera löst inom ramen för den Euklidiska geometrin.

Bevis. **OBS! Motivering inom ramen för den Euklidiska geometrin**
Figuren nedan innehåller de punkter vi behöver för beviset.



Parabelns symmetrilinje och den linje som är parallell med direktrisen och som går genom vertex är markerade med streckade linjer.

Bevis som inte bygger på att man får dra tangenter

Linjen PC är normal till direktrisen och går genom P. Punkten E är den punkt där FC skär OB. Linjen genom P och E, samt dess normal i P är också ritad.

Genom parabelns konstruktion gäller $FP = CP$ och $OF = CB$. Det vi måste argumentera för är varför FP är spegelbilden av CP då CP speglas i linjen genom PE.

Vi får $\triangle EFO \cong \triangle EBC$ eftersom $OF = CB$ och trianglarna har två lika vinklar (en rät och vertikalvinklarna). Därför gäller $FE = CE$. Av detta, och att $\triangle FPC$ är likbent genom sin konstruktion, följer att $\triangle FPE \cong \triangle PEC$.

Härur följer att de markerade vinklarna är lika, och därmed att vinklarna mot normalen till PE i P också är lika.

I denna argumentation är det inte använt att man får dra en tangent till kurvan. Därför är det egentligen inte bevisat att EP är tangent till kurvan, bara att de markerade vinklarna är lika.

Bevis som bygger på att man får dra tangenter

Vi drar tangenten till parabeln i punkten P. Låt spegelbilden av F i tangenten vara C. Då gäller $FP = CP$, vilket är en del av parabelns konstruktion. Därför ligger C på direktrisen. Nu återstår att bevisa att CP är ortogonal med direktrisen.

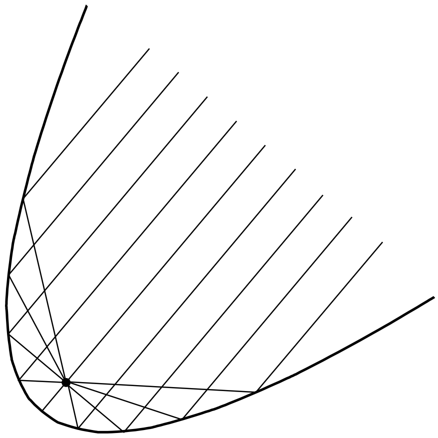
Eftersom C är konstruerad som spegelbilden av F gäller $EF = CE$. Då gäller $\triangle FPE \cong \triangle PEC$ och därmed $\triangle EFO \cong \triangle EBC$. Ur detta följer att CP är ortogonal med direktrisen.

□

10.3 Exempel och tillämpningar

Det är sats 10.2.3 som ligger till grund för tillämpningar av parabeln. Exempel är parabolantenner, lampskärmar och raketdysor.

Fenomenet illustreras i figuren nedan.



Om en lampa placeras i fokalpunkten till en parabelformad (parabol i tre dimensioner) spegel går alla ljusstrålar ut parallellt längs parabelns symmetrilinje.

10.4 Övningar

1. Skriv parabeln $\frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} - y + \frac{13}{4} = 0$ på formen (10.1).

2. Bestäm symmetrilinje och vertex för parablen $\frac{y^2}{4} + \frac{3\,y}{2} + \frac{45}{4} - x = 0$.

3. Vilken koordinat har fokalpunkten och vilken ekvation har direktrisen till parabeln $\frac{x^2}{6} - y = 0$?

4. Vilken koordinat har fokalpunkten och vilken ekvation har direktrisen till parabeln $0 = \frac{y^2}{4} - y - 4\,x - 19$?

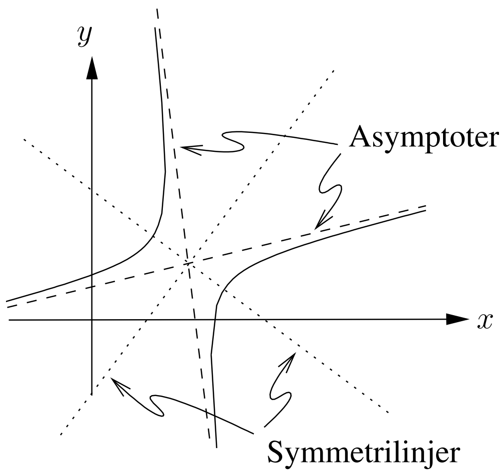
5. Bevisa sats 10.1.4.

11 Hyperbeln

11.1 Definition och algebraiska omskrivningar

Definition 11.1.1. En *hyperbel* är lösningsmängden till en kvadratisk form som uppfyller villkoret $b^2 > 4ac$. ▲

Två speciella egenskaper för hyperbeln är att den består av två delar, samt att det alltid finns två linjer som kurvan närmar sig asymptotiskt. Det finns också två symmetrilinjer. Bilden nedan visar en (sned) hyperbel.



Observera att man säger *en* hyperbel eftersom det är *en* lösningsmängd till en viss ekvation, trots att den består av två delar.

Definition 11.1.2. En hyperbel där $b = 0$ är en *rak*[4] hyperbel. ▲

Vi kan notera att symmetrilinjerna för en rak hyperbel är parallella med koordinataxlarna.

Sats 11.1.3. *En rak hyperbel kan skrivas*

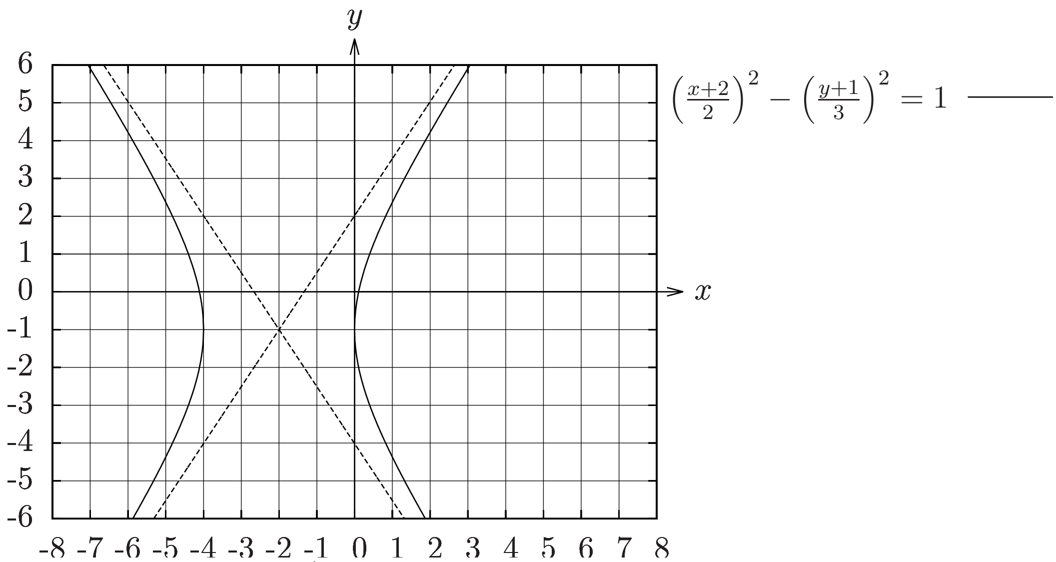
$$\pm\left(\frac{x-x_0}{s}\right)^2 \mp \left(\frac{y-y_0}{t}\right)^2 = 1. \tag{11.1}$$

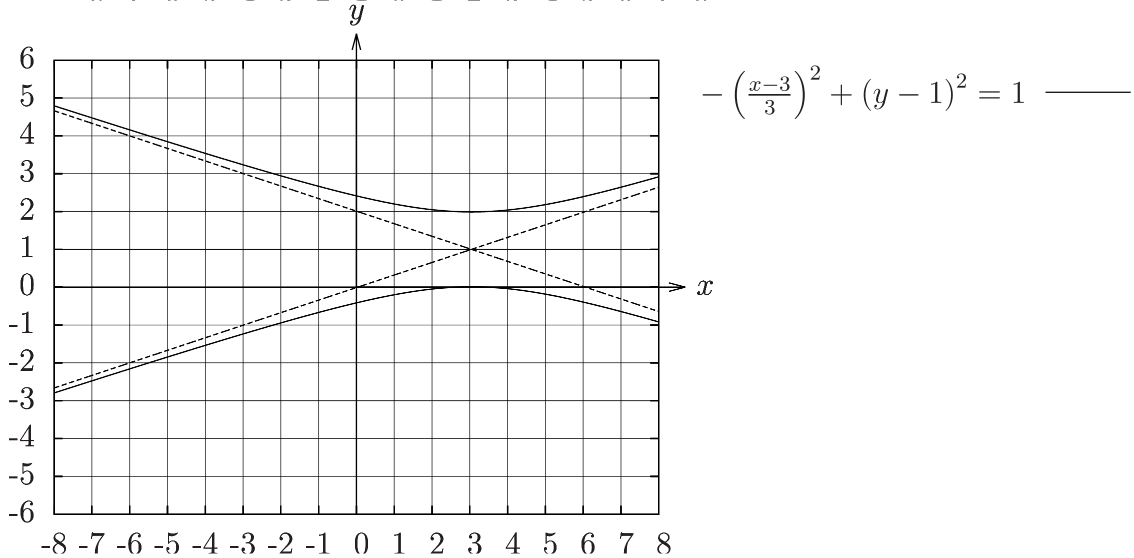
Symmetrilinjerna blir $x = x_0$ *och* $y = y_0$ *och medelpunkten är* (x_0, y_0).

Som tidigare fall är beviset av denna sats en enkel kvadratkomplettering av (6.1).

Om $b = 0$ måste precis en av a och c vara negativ för att $b^2 > 4ac$ skall kunna gälla. Därav följer att en av termerna i högerledet i (11.1) är negativ och den andra är positiv. I graferna nedan visas ett exempel på detta.

[4]OBS! Detta är inte en vedertagen definition i allmänna matematiska texter, men lämpar sig väl för våra syften.





11.2 Geometriska egenskaper

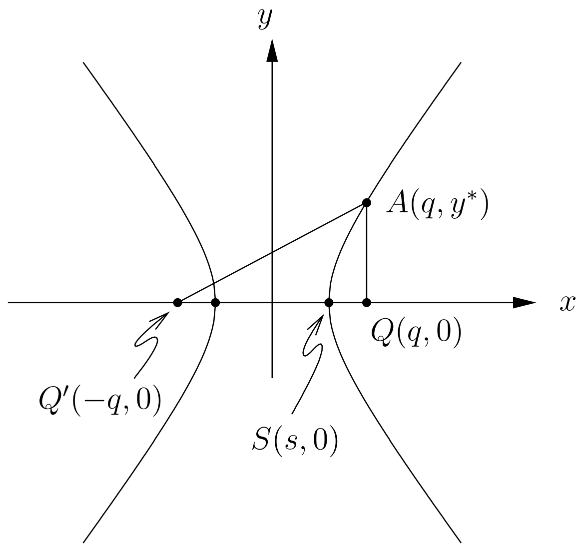
Det speciella med hyperbeln, jämfört med parabeln, är att den asymptotiskt närmar sig två linjer. Det betyder att man kommer allt närmare en viss linje, om man följer hyperbeln. Man kommer dock inte till linjen, och speciellt skär inte hyperbeln linjen.

Sats 11.2.1. *Riktningskoefficienterna för asymptoterna till en hyperbel på formen* (11.1) *är* $\pm\frac{t}{s}$.

Den geometriska konstruktionen för hyperbeln påminner om den för ellipsen. Vi formulerar detta som en sats.

Sats 11.2.2. *För en given hyperbel finns det två punkter sådana att att differensen av avståndet från en godtycklig punkt på hyperbeln till de två punkterna är samma för alla punkter på hyperbeln.*

Definition 11.2.3. De punkter som avses i satsen ovan benämns *fokalpunkter* till hyperbeln. ▲



Bevis. Liksom i tidigare fall måste vi begränsa oss till en rak hyperbel med medelpunkt i origo. Dess ekvation blir då

$$\left(\frac{x}{s}\right)^2 - \left(\frac{y}{t}\right)^2 = 1.$$

Vi låter den konstanta differensen vara D och fokalpunkterna vara $Q(q, 0)$ respektive $Q'(-q, 0)$. Vi skall nu bestämma hur D och q beror på s och t.

Låt punkten $A(q, y^*)$ vara en punkt på hyperbeln. Det betyder att

$$y^* = t\sqrt{\left(\frac{q}{s}\right)^2 - 1}.$$

Vi tecknar ekvationerna

$$\begin{aligned} d(S, Q') - d(S, Q) &= D \\ d(A, Q') - d(A, Q) &= D. \end{aligned}$$

Med insatta koordinater får vi

$$\begin{aligned} \sqrt{(s-(-q))^2 + (0-0)^2} - \sqrt{(s-q)^2 + (0-0)^2} &= D \\ \sqrt{(q-(-q))^2 + (y^*-0)^2} - \sqrt{(q-q)^2 + (y^*-0)^2} &= D \end{aligned}$$

vilket förenklas till

$$\begin{aligned} s + q - (q - s) &= D \\ \sqrt{(2q)^2 + (y^*)^2} - y^* &= D. \end{aligned}$$

Den första ekvationen ger att $2s = D$. Om vi sätter in detta samt uttrycket för y^* i den andra ekvationen får vi en ekvation som är bökig, men inte omöjlig att lösa. Lösningen är

$$q^2 = s^2 + t^2.$$

□

11.3 Exempel och tillämpningar

Planeternas banor runt solen beskrivs som sagt av ellipser. Kroppar som kommer utifrån solsystemet påverkas av solens gravitation på ett sådant sätt att dess bana kröks så att banan bildar en hyperbel.

11.4 Övningar

1. Omvandla $-\frac{y^2}{9} + \frac{4\,y}{9} + \frac{x^2}{16} - \frac{3\,x}{8} + \frac{17}{144} = 1$ till formen (11.1).
2. Bestäm fokalpunkter till $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$.
3. Bestäm skärningspunkterna mellan linjen $0 = -y + 3\,x + 5$ och hyperbeln $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$.
4. Bestäm k så att linjen $y = kx + 3$ inte skär hyperbeln $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$.
5. Bevisa sats 11.1.3.

12 Kvadratiska Diofantiska ekvationer

Trippeln (X, Y, Z) där $X, Y, Z \in \mathbb{Z}$ kallas en **Pythagoresik trippel** om

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 0.$$

Notera här att vi använder versalerna X, Y, Z för att skilja dem från koordinaterna (x, y) i $\mathbb{R}^2$.

Uttrycket för en Pythagoreisk trippel är ett specialfall av följande sorts ekvation.

Definition 12.0.1. En *kvadratisk Diofantisk ekvation* är en ekvation av typen

$$aX^2 + bXY + cY^2 + dXY + eYZ + fZ^2 = 0$$

där alla koefficienter är heltal och vi söker lösningar som också är heltal. ▲

Sats 12.0.2. *Ett uttryck för alla Pythagoreiska tripletter är*

$$\begin{aligned} X &= 2\,m\,n \\ Y &= n^2 - m^2 \\ Z &= n^2 + m^2 \end{aligned}$$

där $n, m \in \mathbb{Z}$.

Vi ska snart bevisa denna sats, och på köpet få en lösningsgmetod för kvadratiska Diofantiska ekvationer, men för resonemanget måste vi göra följande definition.

Definition 12.0.3. En *rationell punkt* är en punkt i $\mathbb{R}^2$ där båda koordinaterna är rationella tal. ▲

Följande sats kopplar Pythagoreiska tripletter till enhetscirkeln. Senare skall vi koppla de kvadratiska Diofantiska ekvationerna till kvadratiska former.

Sats 12.0.4. *För varje pythagoreisk trippel (X, Y, Z) där $Z \neq 0$ finns en rationell punkt på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ och tvärt om.*

Bevis. För alla (X, Y, Z) som är pythagoreiska tripplar gäller ju $X^2 + Y^2 = Z^2$. Denna ekvation kan delas med Z^2 eftersom $Z \neq 0$. Då fås

$$\frac{X^2}{Z^2} + \frac{Y^2}{Z^2} = 1.$$

Vi ser att punkten $(x, y) = (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$ tillhör enhetscirkeln.

Omvänt gäller att om (x, y) tillhör enhetscirkeln och är rationella punkter, kan vi skriva dem med samma nämnare enligt $x = \frac{X}{Z}$ och $y = \frac{Y}{Z}$. Vi får

$$x^2 + y^2 = \frac{X^2}{Z^2} + \frac{Y^2}{Z^2} = 1$$

och ur det $X^2 + Y^2 = Z^2$. $\square$

Sats 12.0.5. *Om en linje med rationell riktningskoefficient skär enhetscirkeln i en rationell punkt, är även den andra skärningspunkten en rationell punkt.*

Bevis. Om linjen har ekvationen $y = k\,x + m$ och detta sätts in i $x^2 + y^2 = 1$ fås en andragradsekvation i x. Om det finns två lösningar ges dessa av $x = x_S \pm \sqrt{D}$ för någon diskriminant D och där x_S är medelvärdet av lösningarna.

Om den ena lösningen är rationell måste den andra också vara det för att $x_S \in \mathbb{Q}$ skall gälla. Då betyder det att $\sqrt{D} \in \mathbb{Q}$, vilket ger att båda lösningarna är rationella tal. $\square$

En följd av detta är följande.

Sats 12.0.6. *Varje rationell punkt på enhetscirkeln utom $(0, 1)$ är en skärningspunkt mellan cirkeln och linjen $y = k\,x - 1$ för något rationellt k, och omvänt, varje rationellt k ger en rationell skärningspunkt.*

Bevis. Vi noterar nu att linjen $y = k\,x - 1$ skär enhetscirkeln i den rationella punkten $(0, -1)$. Sats 12.0.5 ger att även den andra skärningspunkten är rationell. $\square$

Nu kan vi bevisa stats 12.0.2.

Bevis. Om uttrycket $y = k\,x - 1$ sätts in i $x^2 + y^2 = 1$ fås (notera att $x \neq 0$ för den sökta skärningspunkten)

$$\begin{aligned}
x^2 + (k\,x - 1)^2 &= 1 \\
x^2 + k^2\,x^2 - 2\,k\,x + 1 &= 1 \\
(1 + k^2)\,x^2 - 2\,k\,x &= 0 \\
(1 + k^2)\,x^2 &= 2\,k\,x \\
x &= \frac{2\,k}{1 + k^2} \qquad (12.1)
\end{aligned}$$

När detta uttryck sätts in i linjens ekvation fås

$$\begin{aligned}
y &= k\,\frac{2\,k}{1 + k^2} - 1 \\
y &= \frac{2\,k^2 - (1 + k^2)}{1 + k^2} \\
y &= \frac{k^2 - 1}{1 + k^2} \qquad (12.2)
\end{aligned}$$

Eftersom $k \in \mathbb{Q}$ kan vi skriva $k = \frac{m}{n}$. När detta sätts in i (12.1) och (12.2) fås

$$\begin{aligned} X &= \frac{2\,\dfrac{m}{n}}{1 + \left(\dfrac{m}{n}\right)^2} = \frac{2\,m\,n}{m^2 + n^2} \\ Y &= \frac{\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 - 1}{1 + \left(\dfrac{m}{n}\right)^2} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

Täljare och nämnare i dessa uttryck kan identifieras med X, Y och Z i beviset för sats 12.0.4 vilket ger

$$\begin{aligned} X &= 2\,m\,n \\ Y &= m^2 - n^2 \\ Z &= m^2 + n^2. \end{aligned}$$

□

Bevismetoden som används ovan kan även tillämpas för att skapa uttryck för lösningar till alla kvadratiska Diofantiska ekvationer. Om man kan hitta en rationell punkt (x_0, y_0) på motsvarande kvadratiska form i $\mathbb{R}^2$, kan man enkelt bilda linjen $y = k\,x + m$ som går genom denna.

Satserna 12.0.5 och 12.0.6 (som dock får modifieras till att passa skärningspunkten (x_0, y_0)) gäller alla kvadratiska former.

När uttrycket för linjen sätts in i den kvadratiska formen fås uttryck för den andra skärningspunkten (x_k, y_k) som alltså beror av k. När k byts mot $\frac{m}{n}$ fås uttryck för X respektive Y från täljarna i utttycken och Z från nämnarna (som blir lika i de båda uttrycken).

13 Högre dimensioner

Allt som tagits upp i $\mathbb{R}^2$ har sin motsvarighet i högre dimensioner. Till exempel är en punkt i $\mathbb{R}^3$ en ordnad triplett (x, y, z) av reella tal.

Den här texten är inte tänkt att reda ut rymdgeometrin, men vi kan ändå se på några exempel som förhoppningsvis känns naturliga.

Ett plan har ekvationen $ax + by + cz + d = 0$, och två plan är parallella om $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$. Två icke-parallella plan skär varandra längs en linje.

Det går inte att skriva *en* ekvation för *en* linje en linje är endimensionell och rummet har tre dimensioner[5]

Motsvarigheten till kvadratisk form är

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

Naturligtvis går detta uttryck att skriva på mer begripliga former. En *sfär* går att skriva på formen

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2.$$

[5]Generellt gäller att antalet ekvationer som krävs är differensen mellan rummets dimension och lösningsmängdens topologiska dimension.

Motsvarigheten till ellipsen heter *ellipsoid*. En rak ellipsoid går att skriva på formen

$$\left(\frac{x-x_c}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_c}{b}\right)^2+\left(\frac{x-z_c}{c}\right)^2=1.$$

Parabelns motsvarighet heter *paraboloid* och finns i två fall, elliptiska och hyperboliska. Hyperbelns motsvarighet heter *hyperboloid* och finns även den i två former. Wikipedia har flera bra bilder under rubriken Quadratic Surface[6].

I tre dimensioner är de degenererade kvadratiska formerna däremot intressanta. Exempelvis är

$$z^2=x^2+y^2$$

en kon och

$$x^2+y^2=r^2$$

en cylinder.

14 Koniska sektioner

De kvadratiska formerna i två variabler hänger ihop med varandra genom lösningsmängden till ett ekvationssystem som beskriver ett plan och en kon. Figurerna nedan visar konen

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2=x^2+y^2$$

som alltså har z-axeln som sin symmetriaxel. Det är bara den del av lösningsmängden som har $z\geq 0$ som visas. Hela lösningsmängden ser ut som två koner som möts med spetsarna mot varandra.

Till vänster ses den ”från sidan”, så att y-axeln går utåt i bilden[7] och till höger i ett perspektiv så att det syns att det är en kon. Om vi specialstuderar den del av konen som har $y=0$ får vi två linjer $z=\pm 2x$. I planet $y=0$ ”lutar alltså konens sidor” med riktningskoefficienterna ± 2.

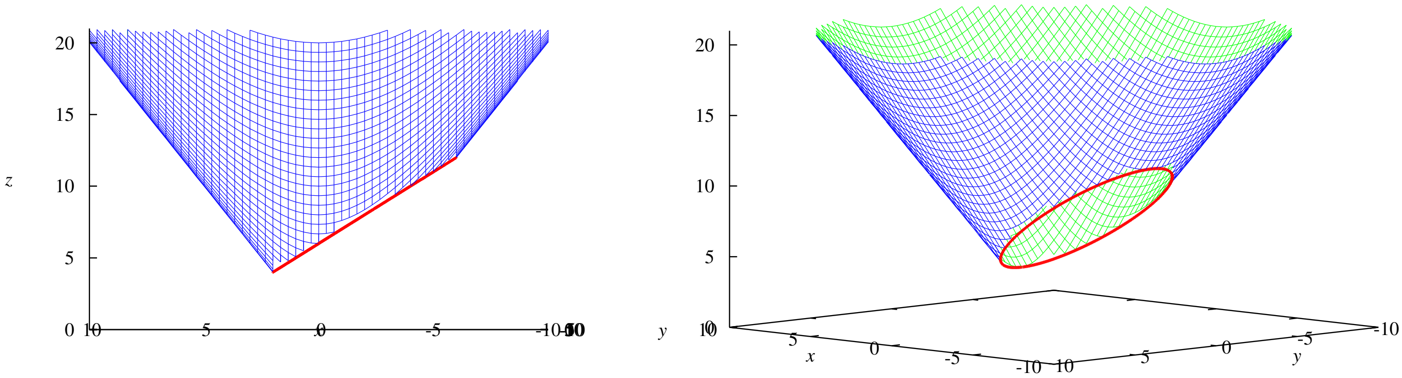
I de två bilderna nedan skärs konen av planet

$$z=-x+6.$$

I planet $y=0$ lutar denna linje mindre än konens sidor. Snittkurvan blir då en ellips. Det skulle bli en cirkel om planet inte skulle luta, eller med andra ord ha z-axeln som normal.

[6]http://en.wikipedia.org/wiki/Quadric

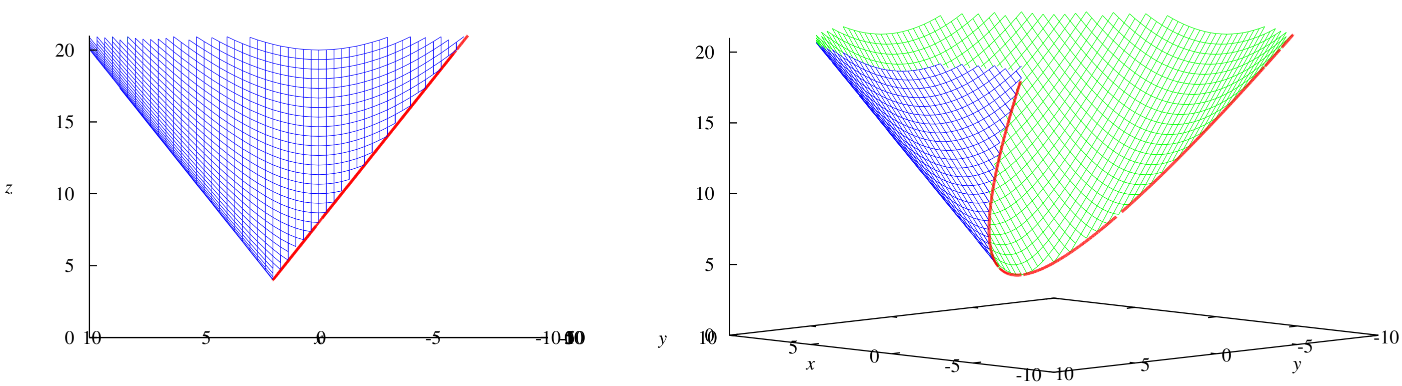
[7]Det kanske inte är så pedagogiskt. Det hade varit bättre om y-axeln gått utåt, då skulle x-axeln öka åt höger som vi är vana. Nu ökar alltså x-axeln åt vänster! Om tid ges ändrar jag det till kommande upplagor.



I fallet nedan skärs konen av planet

$$z = -2x + 8.$$

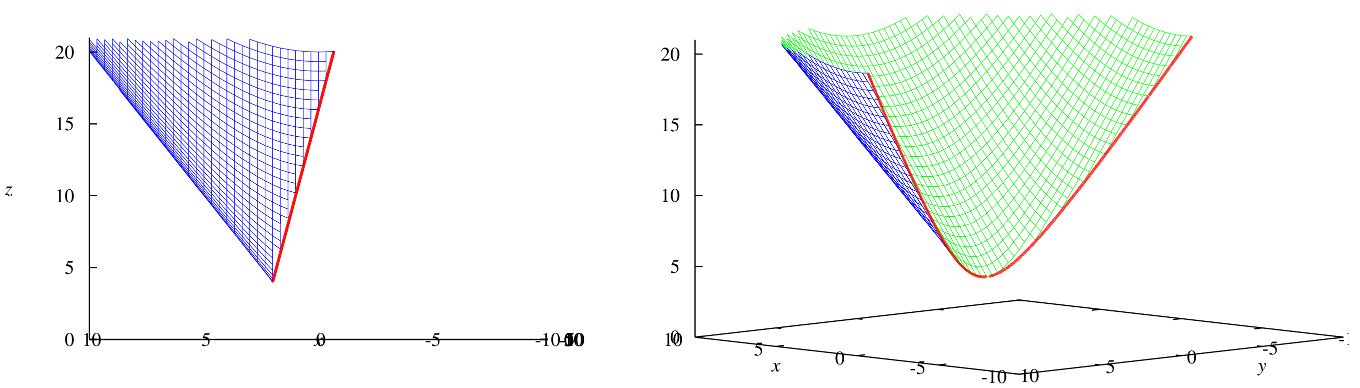
Nu lutar planet lika mycket som konens sidor. Då uppkommer en parabel som snittkurva.



Då planet lutar mer än konen uppkommer istället en hyperbel. Nedan visas skärningen med planet

$$z = -6x + 16.$$

Hyperbelns andra del fås för $z < 0$, vilket inte visas i figuren.



15 Metrik

En metrik är ett sätt att mäta avstånd. Det är ett mycket grundläggande begrepp som har många tillämpningar långt utanför koordinatgeometrin. Därför görs följande allmänna definition.

15.1 Allmänna egenskaper

Definition 15.1.1. En *metrik* på en mängd A är en funktion $d : A \times A \to \mathbb{R}$ som uppfyller följande krav:

1. $d(a, b) \geq 0$ med likhet endast om $a = b$.
2. $d(a, b) = d(b, a)$
3. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$

▲

Denna definition är som sagt mycket allmän, men dessa krav för att en funktion skall kunna användas som metrik upplevs förhoppningsvis som naturliga.

Det första kravet säger att avståndet mellan två punkter måste vara positivt.

Det andra kravet säger att avståndet från en punkt till en annan måste vara lika med avståndet mellan samma punkter om man går åt andra hållet.

Det sista kravet säger att ett avstånd mellan två punkter alltid är mindre än eller lika med omvägen över en tredje punkt.

Poängen är att man kan definiera funktioner som uppfyller dessa krav på andra mängder än punktmängder, exempelvis på mängder av funktioner. Man kan också definiera andra metriker än den Euklidiska på $\mathbb{R}^2$, vilket vi skall se exempel på.

Definition 15.1.2. Ett *metriskt rum* (A, d) är en mängd A där det finns en metrik d definierad. ▲

Exempel 15.1.3. Med metriken $d(a, b) = |a - b|$, där symbolen $|\cdot|$ är det vanliga absolutbeloppet, blir $(\mathbb{Z}, d)$ ett metriskt rum. Denna metrik kan även användas på $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$. ▲

Vi repeterar den metrik vi definierade i avsnitt 4.1, uttrycket 4.1.

Definition 15.1.4. Den *Euklidiska metriken* på $\mathbb{R}^2$ definieras som

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

där $\Delta x = Q_x - P_x$ och $\Delta y = Q_y - P_y$. ▲

Med den Euklidiska metriken blir naturligtvis $(\mathbb{R}^2, d_E)$ ett metriskt rum.

15.2 Taxi-, maximimetriken och andra metriker

Två enkla metriker ges i följande definitioner.

Definition 15.2.1. *Taximetriken* ges av

$$d_T(P, Q) = |\Delta x| + |\Delta y|$$

och *maximimetriken* ges av

$$d_M(P, Q) = \max(|\Delta x|, |\Delta y|).$$

▲

Dessa två funktioner uppfyller kraven för att vara metriker.

Vi gör nu en liten omdefiniering av vad som menas med en cirkel.

Definition 15.2.2. En *cirkel* är mängden av alla punkter som ligger på samma avstånd (cirkelns *radie*) från en given punkt (cirkelns *medelpunkt*). ▲

I denna definition används begreppet metrik, så om vi förändrar metriken kommer mängden av de punkter som utgör en cirkel att förändras. Det är en bra övning att rita en cirkel med de olika metrikerna.

En annan viktig metrik ges i följande definition.

Definition 15.2.3. p-metriken ges av

$$d_p(P, Q) = \sqrt[p]{|\Delta x|^p + |\Delta y|^p}$$

där $p \geq 1$. ▲

Naturligtvis gäller $d_E \equiv d_2$ och $d_T \equiv d_1$ men man kan också visa att maximimetriken är en slags specialfall denna metrik,

$$d_M \quad = \quad \lim_{p \to \infty} d_p.$$

De punktmängder som är cirklar i p-metriken där $p > 2$ benämns *superellipser* och förekommer ofta i arkitektur och design.

Vi avslutar med att nämna att de riktigt intressanta metrikerna beror av koordinaterna. Då gäller till exempel att avståndet mellan två punkter beror av vilken väg man tar mellan punkterna. Att förstå dessa situationer är grunden för att förstå den allmänna relativitetsteorin. Matematiken som krävs för detta sträcker sig dock utanför denna text[8].

15.3 Övningar

1. Beräkna avstånden $d_E(A, B)$, $d_T(A, B)$ och $d_M(A, B)$ för $A = (3, -5)$ och $B = (-8, -2)$.

2. Rita två cirklar med till exempel radie 3 med taxi- och maximimetriken.

3. Försök bevisa att taximetriken och maximimetriken uppfyller 15.1.1.

4. Visa att d_p inte är en metrik för $p < 1$.

[8] En introduktion till detta ges i texten Wild (2019) *Allmänna relativitetsteorin*

16 Facit

Övningar i 4.2.

1. $5\sqrt{730}$
2. Till exempel $(104, 103)$.
3. Oändligt många.
4. Det finns bara en punkt: origo själv.

Övningar i 5.9.

1. Punkterna $(3, 2)$ och $(126, 43)$ uppfyller linjens ekvation och ligger därför på linjen.
2. $0 = 2x - y - 4$
3. Nej, eftesom $5 \cdot 15 + 3 \cdot (-5) \neq 0$.
4. Nej, punkten $(4, 4)$ är inte en lösning till den ekvation som har de två andra punkterna som lösning (ekvationen för linjen genom punkterna).
5. Ja.
6. Ledning:Att till exempel punkten (x_1, y_1) ligger på linjen betyder att ekvationen $y_1 = kx_1 + m$ är uppfylld.
7. Ledning: Använd sats 5.2.3
8. -
9. Avståndet är $\frac{140}{\sqrt{113}}$.

Övningar i 7.4

1. Att svara $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$ är inte att svara på allmän form. Vi får istället $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 4^2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$.
2. Uttrycket kvadratkompletteras med avseende på både x och y. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$
3. a) Den första har radie 4 och den andra har radie $\sqrt{20}$.
   b) Avståndet är 2.
4. Punkterna är $(-1, -5)$ och $(\frac{23}{13}, -\frac{119}{13})$.
5. Skärningspunkter saknas.
6. Sätt in linjens ekvation i cirkeln. Du får en tangent då det bara finns en lösning på ekvationen för skärningspunkterna. Det ger ekvationen $3k^2 + 6k - 5 = 0$ som har lösningarna $k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.

7. Punkterna är $(-4,-2)$ och $(-\frac{4}{41}, \frac{118}{41})$.

8. Punkterna är $(-\frac{5}{4}, \frac{-3\sqrt{15}+4}{4})$ och $(-\frac{5}{4}, \frac{3\sqrt{15}+4}{4})$.

Övningar i 8.4.

1. $\frac{(y+2)^2}{4} + \frac{(x-2)^2}{9} = 1$

2. Fokalpunkterna är $(1,2)$ och $(1,-6)$.

3. Punkterna är $(\frac{164}{109}, \frac{518}{109})$ och $(-4,2)$.

4. Tips: Börja med att dela båda led med ac.

Övningar i 10.4.

1. $y = \frac{(x-2)^2}{16} + 3$

2. Symmetrilinje är $y = -3$ och vertex är $(9,-3)$.

3. Fokalpunkt är $(0, \frac{3}{2})$ och direktrisens ekvation är $y = -\frac{3}{2}$.

4. Fokalpunkt är $(-1,2)$ och direktrisens ekvation är $x = -9$.

5. -

Övningar i 11.4.

1. $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

2. Punkterna är $(-7,1)$ och $(3,1)$.

3. Punkterna är $(-2,-1)$ och $(\frac{86}{65}, \frac{583}{65})$.

4. Linjen skär inte hyperbeln för $\frac{1-\sqrt{31}}{10} < k < \frac{1+\sqrt{31}}{10}$.

5. Tips: Börja med att dela båda led med ac.

Övningar i 15.3.

1. $d_E(A,B) = \sqrt{130}$, $d_M(A,B) = 11$, $d_T(A,B) = 14$.

2. -

3. Triangelolikheten är ganska besvärlig, men övertyga dig om att den gäller genom att välja några specialfall.

4. Ledning: Det räcket att hitta ett enda specialfall som inte uppfyller någon av kraven på metrik. Försök hitta ett så enkelt exempel som möjligt, till exempel punkter som ligger på koordinataxlarna.