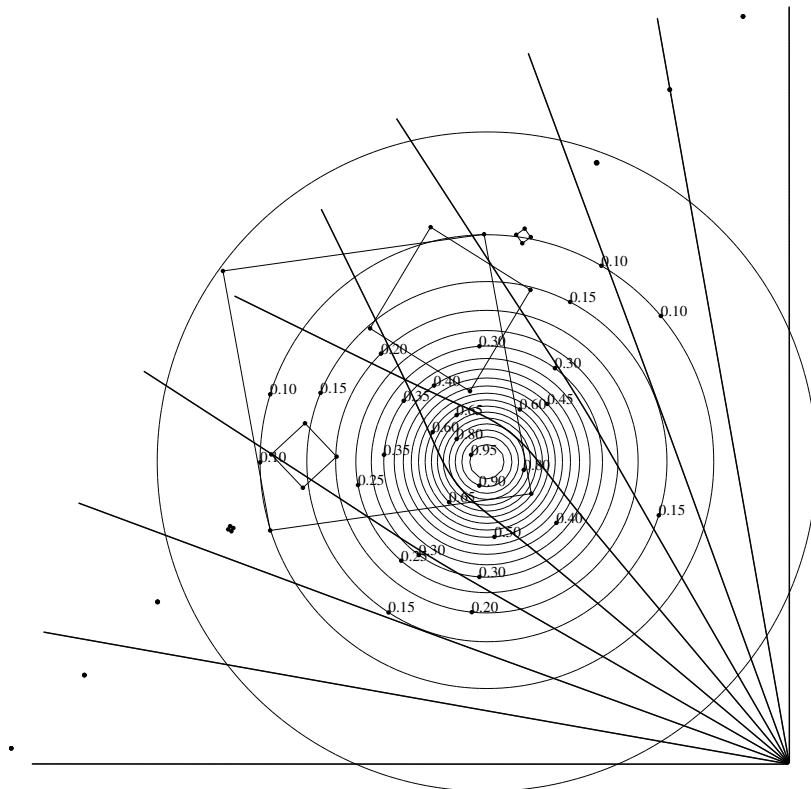


ALLMÄNNA RELATIVITETSTEORIN



EN INTRODUKTION MELLAN POPULÄRVETENSKAP OCH UNIVERSITETSNIVÅ

JOHAN WILD

2021-04-12

©Johan Wild 2014

johan.wild@europaskolan.se

Får gärna användas i undervisning, kontakta i så fall författaren.

2021-04-12

Innehåll

1	Inledning	5
2	Upplägg och historien bakom GR	6
3	Längden av en kurva	7
3.1	En kurva som är grafen till en funktion	7
3.2	En kurva på parameterform	8
3.3	Längden av en kurva på parameterform	9
3.4	Övningar	9
4	Konstruktion av metrik på \mathbb{R}^2	11
4.1	Metriken ur höjden över \mathbb{R}^2	11
4.2	Metriken som en matris och en tensor	14
4.3	Längden då metriken är koordinatberoende	14
4.4	Geodeter	15
4.5	Övningar	16
5	En platt rumtid – SR	18
5.1	Övningar	20
6	Schwarzschildmetriken	21
6.1	Bakgrund	21
6.2	All massa i centrum	21
6.3	Några enkla kurvor	22
6.4	Planetbanor	24
6.5	Gravitationslinser	25
6.6	Övningar	25
7	Svarta hål	27
7.1	Allmänt	27
7.2	Fritt fall in mot ett svart hål	28
7.3	Övningar	29
8	Kosmologi	30
8.1	En symmetrisk metrik	30
8.2	Slutet, platt eller öppet?	31
8.3	Rödskift och Hubbles lag	32
8.4	Roadmap	35
8.5	Steg 1 – Olika sorters energi	36
8.6	Steg 2, 3 och 4 – Mot en differentialekvation	39
8.7	Steg 5 – Vårt universum	40
8.8	Steg 6 – En beräkning	40
8.9	Steg 7 – Storleken av vårt synliga universum	42
8.10	Övningar	45
A	Lite om tensorer	46
A.1	Enkla exempel	46
A.1.1	Vektorer och linjära funktioner	46

A.1.2	Matriser	47
A.1.3	Tensorer	48
A.1.4	Tensorer av orningarna $(2, 0)$ och $(0, 2)$	48
A.2	Allmänt om tensorer	49
A.3	Basbyten	51
A.4	Exempel på viktiga tensorer av ordning $(0,2)$	53
A.5	Metriken som ett tensorfält av ordning $(0,2)$	55
A.6	Höja och sänka index	56
A.7	Einsteins fältekvationer	58
A.8	Vad är Γ_{bc}^a och vad används den till?	60
A.9	Gradient och riktningsderivata	60
A.10	Parallelltransport och geodeter	61
A.11	Acceleration och fyrkrafter	61
A.12	Hur bestäms Γ_{bc}^a ?	62

1 Inledning

Denna lilla text, syftar till att introducera den allmänna relativitetsteorin. En vedertagen förkortning för den allmänna relativitetsteorin är GR från engelskans *general relativity*. Av samma anledning kommer jag genomgående använda SR för den speciella relativitetsteorin.

Texter om GR kan delas in i tre grupper. De som riktar sig till allmänheten och gymnasieskolan, de som riktar sig mot grundutbildningen på universitetsnivå och de som används i forskarutbildningar. Stegen mellan framförallt de två första är enormt stort. För att ha någon behållning av matematiken i den andra gruppen måste man ha flera år bakom sig på högskolenivå i matematik och fysik.

Steget mellan grundnivå och forskarnivå på universitetet är också stort. Ofta ligger GR under tillämpad matematik snarare än under fysik. Däremot finns det många som använder GR i sin forskning utan att ha trängt in i alla matematiska förvecklingar. Många astronomer och partikelfysiker lever lyckliga liv utan att veta speciellt väl vad en tensor är.

I sin mest extrema form finns det texter i matematik som tar upp hela GR som ett litet exempel på en mer omfattande matematik. Om man håller sig till en mångfald med fyra dimensioner och utrustar den med en metrik av pseudo-Riemann typ får man grundplåten i GR. Einstein själv lär ha sagt att han själv knappt ansåg sig förstå GR sedan matematikerna hade beskrivit den.

Målet med denna text är att fylla ett tomrum mellan den vanliga populärvetenskapliga framställningen (dit vanliga läromedel för gymnasiet hör) och den för universitetets grundutbildning. Meningen är att den skall vara betydligt enklare än universitetsnivån, men ändå ta upp de viktiga delarna i hur GR byggs upp, även matematiskt, och används. Vi skall också se på ett par tillämpningar som brukar väcka intresse: svarta hål och kosmologi.

Konkret är planen att avsnitt 3.1, 3.3 och 4 ger en förståelse för vad uttryck som (6.1) betyder och hur de används. Uttrycket (6.4) är ett exempel på en sådan användning av (6.1). De grundläggande avsnitten gör förhoppningsvis också att grafer som de på sidorna 24 och 28 blir begripliga.

I avsnittet om kosmologi har jag reducerat framställningen av teorin till ett minimum, men försökt behålla så mycket att det ändå utgör en enhet som går att följa. Jag tycker själv det är fantastiskt att se att man kan beräkna vissa konkreta egenskaper om vad som hände strax efter Big Bang med endast lite gymnasiematematik. Trots att grova förenklingar görs hoppas jag ändå att det ger en bild av att partikelfysik och kosmologi är sammanbundna trots att de två grenarna av fysiken behandlar sådant som händer på den minsta respektive den största skalan.

Den mest tillgängliga av alla universitetsböcker jag känner till är *Gravity – An introduction to Einsteins general relativity* av Hartle. Den är mycket pedagogisk i sin genre, men kräver långt mer matematik än denna text. Avsnittet om kosmologi är mycket starkt inspirerat av denna text.

Ett varmt tack riktar jag till alla elever som visat så mycket intresse för detta ämne så att jag kommit mig för att skriva denna text. Speciellt Sofia, Maja, Cesar och Filip i Sci11, som i denna aspekt motsvarar Big Bang.

2 Upplägg och historien bakom GR

År 1905 publicerade Albert Einstein den speciella relativitetsteorin. Den var tänkt som en teori för rörelse och elektromagnetism och som visade sig stämma bättre med verkligheten än den teori som Newton lade fram på 1600-talet. På 1920-talet visade sig också SR vara förenlig med kvantmekaniken och senare med de ännu mer avancerade teorierna för partikelfysik som växte fram under 1900-talets mitt och slut.

Det SR *inte* behandlar är gravitation och de fall där observatören accelererar. Namnet SR syftar alltså på detta specialfall.

Einstein gjorde en rad tankeexperiment för att försöka utvidga sin teori till att även gälla dessa fall, att bli allmän. Dessa tankeexperiment går det att läsa om i vanliga texter om GR som riktar sig till allmänheten. Möjligen utvidgar jag texten med dessa senare.

En viktig slutsats som Einstein kom fram till var hur som helst att det inte går att skilja acceleration från gravitation. Antag att du befinner dig i ett rum utan fönster i en raket. Du undrar om raket har landat på en planet och gör ett experiment, vilket som helst¹, där du vill påvisa att det finns ett gravitationsfält.

Poängen är att inget sådant experiment skulle kunna skilja på fallen där raket har landat på en planet, eller om raket accelererar likformigt. I det senare fallet skulle du också uppleva att du ”dras mot golvet” trots att det i själva verket är golvet som accelererar mot dig.

En annan viktig situation att ta upp är den där fotoner rör sig i gravitationsfält. Kvantmekaniken ger ett samband mellan fotoners energi och frekvens. Om det är så att fotoner påverkas av gravitationsfält som vanliga kroppar måste de förlora energi då de rör sig uppåt². Eftersom fotoner trots detta skall ha samma fart blir det frekvensen som ändras.

Att fotonen skall hinna lika långt på samma tid och få en annan frekvens fick Einstein att dra slutsatsen att både rummet och tiden påverkas av gravitationen. Mer korrekt, eftersom *gravitation* så att säga ännu inte fanns i hans teori, påverkas rum och tid av existensen av (och avståndet till) massa (tänk stor massa, som en planet).

Dessa tankeexperiment och många fler därtill fick Einstein att formulera följande teori.

Rumtidens ”form” påverkas av fördelningen av massa och energi i den. En observatör rör sig likformigt ”längs räta linjer” i denna krökta rumtid.

Det vi måste reda ut nu är följande punkter.

- Vad menas med ”form” i detta sammanhang? Det blir en del teori för krökta ytor innan vi tar steget till en krökt rumtid.
- Vad menas med att röra sig ”längs en rät linje” i en krökt geometri?

¹Människans balanssinne skulle förstås direkt ge oss denna information, men ur ett teoretiskt perspektiv är det viktigt att detta skall gälla alla fysikens lagar.

²Vi låter *uppåt* definieras av riktningen mot gravitationsfältet.

- Hur räknar man ut olika saker, till exempel hur långt det är mellan olika punkter i rumtiden, när man känner till rumtidens form?
- Hur går krökningen till?

Vi kan ta den sista frågan direkt. GR är några differentialekvationer vars lösning är rumtidens "form". Man kan säga att du berättar för differentialekvationerna hur all massa och all energi är fördelat i ditt universum³, varefter de berättar för dig hur universum är format. När du vet det kan du räkna ut hur saker och ting far och flyger i ditt universum, hur långt det är att åka mellan olika punkter och hur ditt universum förändras.

Varför differentialekvationerna ser ut som de gör och hur man löser dem är *inte* inom ramen för denna text. För det krävs betydligt mer matematik!

För att besvara de tre inledande frågorna skall vi uppehålla oss kring det lite mer lätthanterliga exemplet med en krökt tvådimensionell yta som vi kan tänka oss finns som ett objekt i vår tredimensionella värld. Sedan beger vi oss in i rumtiden!

3 Längden av en kurva

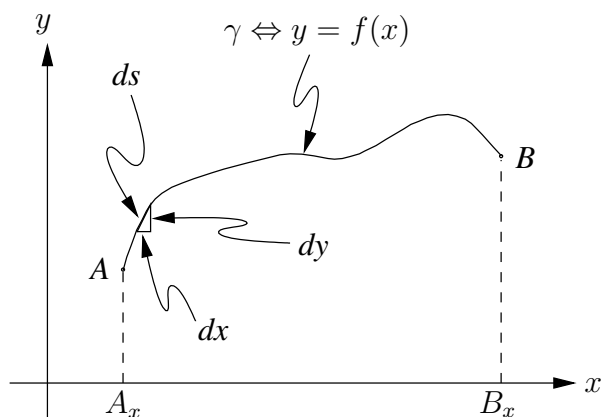
För att beräkna intressanta saker i rumtiden måste vi lära oss hur man beräknar längder av kurvor. Som bekant⁴ är en metrik ett sätt att mäta avstånd. I hela detta avsnitt håller vi oss till \mathbb{R}^2 och använder den euklidiska metriken, där avståndet mellan punkterna P och Q definieras till

$$d(P, Q) = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}.$$

Notationen är densamma som i texten Koordinatgeometri.

3.1 En kurva som är grafen till en funktion

Antag nu att vi har en kurva som går att beskriva som grafen till en funktion. Kurvan är alltså lösningsmängden till en ekvation av typen $y = f(x)$. Låt γ vara kurvan mellan två punkter A och B .



³Med "ditt universum" menas olika specialfall där du till exempel sätter upp en modell med ett universum som bara består av en enda punktformig massa. Det blir en bra modell för ett planetsystem där den enda punktformiga massan är en stjärna och du är intresserad av planeternas rörelser. Planeterna är så små jämfört med stjärnan att de inte påverkar universums form nämnvärt.

⁴Begrepp från texten *Koordinatgeometri* som är kurslitteratur i Axiomatiska System används utan närmare motivering i denna text.

Längden L av γ kan beräknas med en integral enligt

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Om vi bryter ut dx^2 får vi

$$L = \int_{\gamma} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Vi identifierar $\frac{dy}{dx}$ med $f'(x)$ och får slutligen

$$L = \int_{A_x}^{B_x} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

I sammanhang som dessa är det vanligt att de konkreta integrationsgränserna skrivs ut först i slutet. Vill man inte ge kurvan ett namn kan man skriva

$$L = \int_A^B ds.$$

Detta kanske ser enkelt ut, men det är inte alltid så lätt att hitta den primitiva funktionen till integranden.

3.2 En kurva på parameterform

Nästa steg i teoribygget är att vi måste kunna räkna ut längden av en kurva på parameterform.

I \mathbb{R}^2 beskriver vi en kurva med en vektor $\mathbf{r}(t)$, och en vektor skriver vi som en kolumnmatris. Känner du inte till vad en matris är, så menas här endast att vektorns komponenter skrivs som två rader. Tänk gärna på kurvan som om den beskriver en rörelse där t är tiden.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & = & \text{Någon funktion av } t \\ y(t) & = & \text{Någon funktion av } t \end{bmatrix}$$

Notera att $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Exempel 3.2.1. En cirkel ges av kurvan

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

där $0 \leq t \leq 2\pi$. ▲

Tangentvektorn till en kurva i en punkt (ett visst värde på t) ges av

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

Om kurvan beskriver en rörelse för en kropp och t är tiden, får vi kroppens hastighet enligt $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t)$.

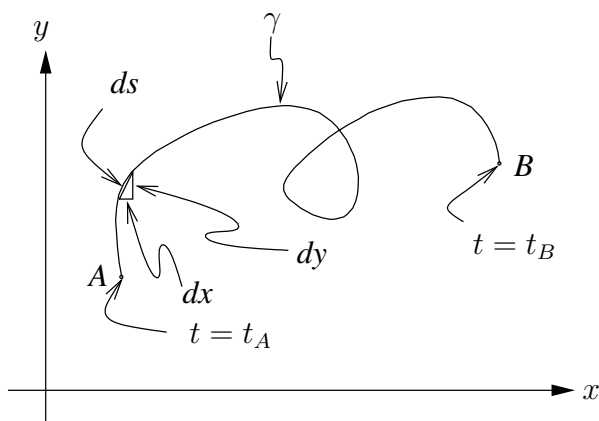
För att anknyta till notationen i appendix A om tensorer, så skulle vi med den sedvanliga notationen där skriva en kurva på formen $r^a(t)$ där det (opreciserade!) indexet a alltså skulle stå för att vi har två uttryck: $r^x(t)$ och $r^y(t)$.

3.3 Längden av en kurva på parameterform

Vi vill räkna ut längden L av en kurva γ på parameterform mellan två punkter A och B på kurvan. Vi låter t_A och t_B vara de värden på t som representerar punkterna A och B . Resonemanget blir mycket likt det i 3.1, men vi måste hantera att både x -koordinaten och y -koordinaten beror på t längs kurvan.

Då vi förflyttar oss en liten bit dt längs kurvan ändras både dx och dy enligt

$$\begin{aligned}dx &= x'(t)dt \\ dy &= y'(t)dt.\end{aligned}$$



Vi får

$$\begin{aligned}L &= \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{\gamma} \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.\end{aligned}$$

Detta uttryck är återigen på sätt och vis en enkel följd av metriken, men generellt är det naturligtvis svårt att hitta primitiv funktion till integranden.

Ofta är det mycket givande att applicera en avancerad teori på enkla exempel.

Övning: 3

Övning: 4

Övning: 5

3.4 Övningar

1. Beräkna längden av kurvan $f(x) = \sqrt{x}$ mellan punkterna $A(0, f(0))$ och $B(3, f(3))$.
2. Beräkna tangentvektorn av en kurva på parameterform som beskriver en cirkel med radie r i några punkter. Rita kurvan och tangentvektorerna. Hur beror tangentvektorns längd på radien?
3. Verifiera att omkretsen av en cirkel är $2\pi r$ genom att beräkna längden av en kurva som beskriver en cirkel med radie r på parameterform.
4. Välj två punkter. Bilda linjen mellan dem på parameterform. Beräkna längden av denna kurva mellan dina punkter. Verifiera att det blir precis det Euklidiska avståndet mellan punkterna.

5. Beräkna längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 5 \cdot 0.8^t \cos(t) \\ 5 \cdot 0.8^t \sin(t) \end{bmatrix}$ mellan punkterna som ges av $t = 0$ och $t = 4\pi$

Facit

1. Integralen beräknas med fördel numeriskt. Längden är $\approx 3.611451844442687$.
2. Tangentvektorn ges av

$$\mathbf{t}(t) = r \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Längden av denna är r . Jämför detta med en rotation med konstant vinkelhastighet. Där beror farten på r .

3. -
4. -
5. Kurvan blir en spiral vars längd är ca 21.56781284541692 le.

4 Konstruktion av metrik på \mathbb{R}^2

4.1 Metriken ur höjden över \mathbb{R}^2

Såhär långt har vi bara använt den euklidiska metriken. Om en yta är krökt gäller inte den. Vi skall nu se hur en metrik för en krökt yta kan konstrueras och se hur man beräknar längden av kurvor i sådana fall.

Antag att vi har en yta som ges av lösningsmängden till en ekvation av typen $z = f(x, y)$. Vi tänker oss alltså att ytan finns i \mathbb{R}^3 och tänker oss z-koordinaten som "höjden" över \mathbb{R}^2 ,

Vi skall nu konstruera en metrik i \mathbb{R}^2 så att längden av kurvan i \mathbb{R}^2 är densamma som längden av kurvan i \mathbb{R}^3 . I \mathbb{R}^3 använder vi den euklidiska metriken, så längden av ett litet element av kurvan ges (i \mathbb{R}^3) av

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4.1)$$

Vi vill uttrycka detta längdelement endast med x- och y-koordinater.

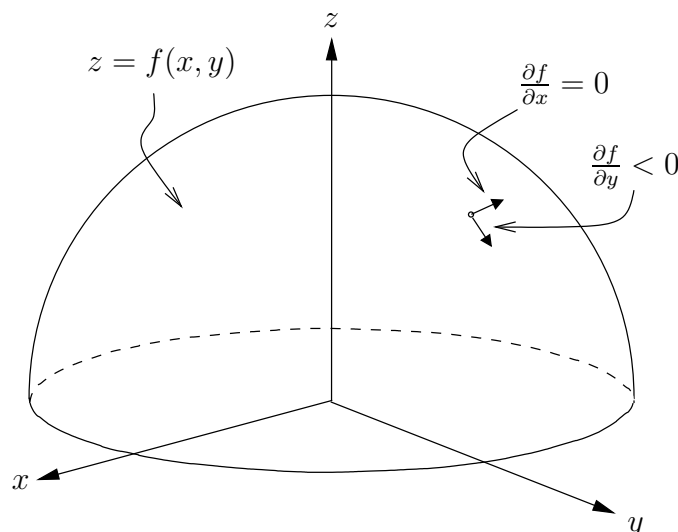
Nu måste vi säga några ord om hur man deriverar en funktion av flera variabler, som funktionen $f(x, y)$ är. Låt den beskriva höjden över \mathbb{R}^2 och tänk dig att du är ute och rör dig på denna yta. Derivatans av en funktion av bara en variabel beskriver som bekant hur den funktionen ändras under en liten förflyttning dx i x-led enligt

$$dy = f'(x)dx.$$

Om du nu befinner dig på din yta och förflyttar dig ett litet steg dx i x-led ändras höjden över \mathbb{R}^2 , men y-koordinaten ändras inte (eftersom förflyttningen bara är i x-led). För ett fixt värde på y har du en funktion av bara en variabel. För varje värde på y har du i själva verket en funktion av x . Varje sådan funktion går att derivera med avseende på x-koordinaten.

På samma sätt har du en funktion av y för varje värde på x om du istället förflyttar dig ett litet steg dy i y-led, och dessa går att derivera med avseende på y-koordinaten.

I en och samma punkt får vi generellt olika värden på derivatan i x-led respektive y-led. Figuren nedan visar ett exempel där det är tänkt att derivatan skall vara noll i x-led, och mindre än noll i y-led.



Vi måste ha en notation som visar vilken variabel vi deriverar med avseende på. Derivator längs olika axlar skrivs

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Övning: 1
Övning: 2

Symbolen ∂ visar att det är frågan om en derivata med avseende på en *av flera* variabler. Detta benämns *partiell derivata*.

Vill vi skriva ett uttryck för hur $f(x, y)$ ändras då vi ändrar både x och y får vi summera förändringarna. Vi får

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Vi använder detta uttryck för att skriva 4.1 som funktion av bara x och y . Vi får

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^2 \quad (4.2)$$

$$= dx^2 + dy^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 dy^2 \quad (4.3)$$

$$= \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) dx^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dy^2 \quad (4.4)$$

Detta är alltså den metrik som beskriver hur långt ett litet ds i \mathbb{R}^2 är. Poängen är att detta alltså beror på var man är i \mathbb{R}^2 , metriken är koordinatberoende.

Uttrycket (4.4) ser kanske inte så roligt ut att räkna med. Det är riktigt att praktiska exempel ofta sväller ut till mycket omfattande beräkningar. Tack och lov finns symbolhanterande program som Maxima.

Icke desto mindre måste vi lära känna uttryck som (4.4) för att kunna hantera motsvarande uttryck i rumtiden. En sak som krånglar till (4.4) är att det finns en blandad term som innehåller både dx och dy . Sådana blandningar är dock inte vanliga i de enklaste tillämpningarna i GR.

Övning: 4

Exempel 4.1.1. För att tydliggöra allt detta måste vi välja ett exempel.

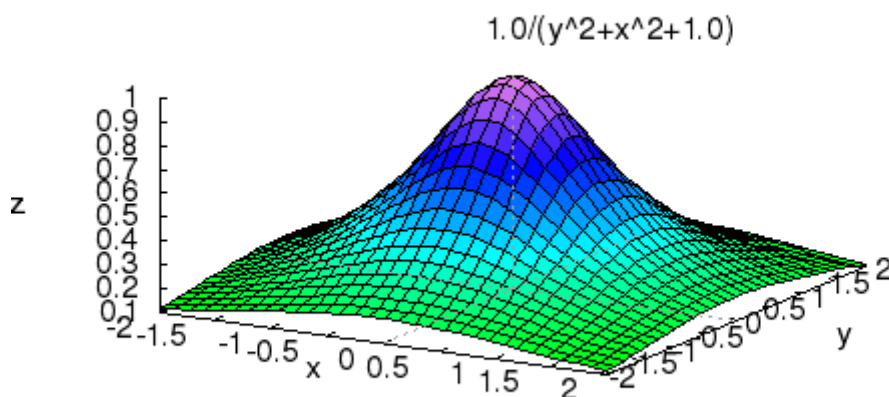
Till denna text finns en Maxima-notebook där detta exempel genereras.

Låt

$$z = f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{N}$$

För att slippa skriva så mycket inför vi $N = x^2 + y^2 + 1$, men måste då komma ihåg att N beror av både x och y .

Ytan blir en kulle med högsta punkt i origo (i \mathbb{R}^2) och är rotationssymmetrisk. Figuren nedan visar ytan.



De partiella derivatorna blir

Övning: 3

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{N^2} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{N^2}. \quad (4.6)$$

Använder vi dessa i (4.4) får vi

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(-\frac{2x}{N^2} dx - \frac{2y}{N^2} dy \right)^2. \quad (4.7)$$

Utvecklar vi kvadraten får vi

$$ds^2 = \left(1 + \frac{4x^2}{N^4} \right) dx^2 + \frac{8xy}{N^4} dx dy + \left(1 + \frac{4y^2}{N^4} \right) dy^2. \quad (4.8)$$

▲

Vi skall strax se hur denna typ av uttryck används, men låt oss först generalisera lite.

Nu har vi tagit oss igenom ett fall där metriken på \mathbb{R}^2 konstrueras utifrån en yta i \mathbb{R}^3 . Möjligen kan man göra tvärt om, konstruera en yta från ett uttryck. En generell metrik ges hur som helst av ett uttryck på formen

$$ds^2 = a(x, y) dx^2 + 2 \cdot b^2(x, y) dx dy + c(x, y) dy^2. \quad (4.9)$$

Faktorn 2 i termen som innehåller både dx och dy får sin förklaring nedan.

Notera skrivsättet att

$$b^2(x, y) \equiv b(x, y) \cdot b(x, y).$$

Det finns krav på metriker, till exempel skall alla avstånd vara positiva och avståndet mellan två olika punkter får inte vara noll, så funktionerna $a(x, y)$, $b(x, y)$ och $c(x, y)$ får inte väljas hur som helst.

4.2 Metriken som en matris och en tensor

Detta avsnitt knyter ihop denna del av texten till den linjära algebran och till begreppet tensor som preciseras i appendix A. Hoppa över detta om du inte har läst det eller inte tror dig kommer att göra det.

Ett uttryck på formen

$$ds^2 = a(x, y) dx^2 + 2 \cdot b^2(x, y) dx dy + c(x, y) dy^2$$

definierar alltså en metrik.

Om vi använder vanlig linjär algebra och låter $\mathbf{ds} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$, kan uttrycket ovan skrivas som

$$ds^2 = \mathbf{ds}^T g \mathbf{ds}$$

där g är matrisen

$$g(x, y) = \begin{bmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{bmatrix}.$$

Notera att faktorn 2 i koefficienten framför $dx dy$ finns för att den "sprids ut" på två matriselement.

Om vi däremot definierat metriken från en skalärprodukt som ges av tensorn av ordning $(0, 2)$ gäller

$$ds^2 = \mathbf{g}(\mathbf{ds}, \mathbf{ds}) = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

enligt den notation som introduceras i avsnitt A.1.4.

På komponentform gäller

$$(ds)^2 = g_{ab} ds^a ds^b$$

enligt notationen som introduceras i avsnitt A.5.

4.3 Längden då metriken är koordinatberoende

Nu skall vi använda metriken för att beräkna längden av en kurva.

Precis som i avsnitt 3.3 måste vi ha en parametrisering av kurvan, och den stoppar vi in i metriken. Vi vandrar längs kurvan som en funktion a t enligt funktionerna $x(t)$ och $y(t)$. Vi måste också använda

$$dx = x'(t)dt$$

$$dy = y'(t)dt$$

precis som i avsnitt 3.3. Vi använder den generella metriken (4.9) och sätter in allt detta uttrycket för längden av en kurva.

Låt γ vara en kurva mellan A och B . Längden L av γ blir

$$\begin{aligned} L = \int_{\gamma} ds &= \int_{\gamma} \sqrt{a(x(t), y(t)) dx^2 + 2 \cdot b^2(x(t), y(t)) dx dy + c(x(t), y(t)) dy^2} \\ &= \int_{\gamma} \sqrt{a(x(t), y(t)) (x'(t)dt)^2 + 2 \cdot b^2(x(t), y(t)) (x'(t)dt) (y'(t)dt) + c(x(t), y(t)) (y'(t)dt)^2} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{a(x(t), y(t)) x'(t)^2 + 2 \cdot b^2(x(t), y(t)) x'(t) y'(t) + c(x(t), y(t)) y'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

Exempel 4.3.1. Vi fortsätter där exempel 4.1.1 slutade.

Låt oss som kurva γ välja den linje som går mellan $A(-2, 0.5)$ och $B(2, 0.5)$. På parameterform ges den av

$$\begin{aligned}x(t) &= t \\y(t) &= 0.5\end{aligned}$$

med $t_A = -2$ och $t_B = 2$. Funktionerna har derivatorna

$$\begin{aligned}x'(t) &= 1 \Rightarrow dx = 1 \cdot dt \\y'(t) &= 0 \Rightarrow dy = 0 \cdot dt.\end{aligned}$$

Med detta insatt i 4.8 får vi

$$ds = \sqrt{1 + \frac{4t^2}{(1 + t^2 + 0.5^2)^4}} dt.$$

Längden av γ blir då

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \frac{4t^2}{(1 + t^2 + 0.5^2)^4}} dt.$$

Att skriva upp den primitiva funktionen till integranden är inte inom ramen för denna text, vi får nöja oss med att det numeriska värdet är ungefär 4.20582437576.

Eftersom vi så att säga har gått upp för en kulle och kommit ned igen blir avståndet längre än 4 som är det euklidiska avståndet mellan A och B .

I Maxima-filen kan du skapa fler exempel och jämföra med ”verkligheten” (som om du skulle gå omkring på ett berg som är format som ytan $z = f(x, y)$). ▲

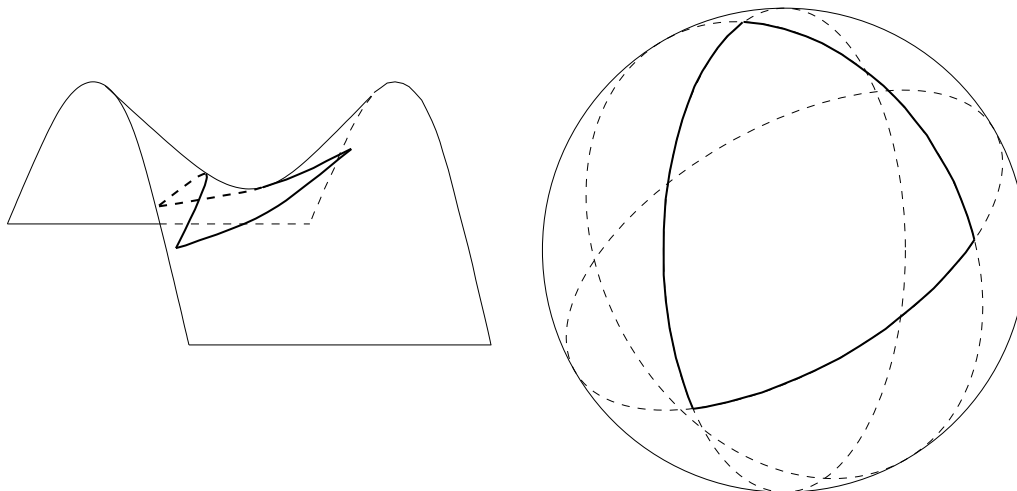
4.4 Geodeter

En *geodet* är en kurva som ”går rakt fram”. Om man följer en geodet upplever man inte att man svänger. På jordklotet är ekvatorn en geodet, men inte polcirkelarna. Denna effekt uppstår på grund av att jordytan är krökt. En lös definition av att en yta är krökt skulle kunna vara just att alla geodeter inte är räta linjer.

På ett klot är alla skärningskurvor mellan plan som går genom origo och sfären geodeter. Dessa kurvor kallas *storcirklar*. Alla geodeter på en sfär är storcirklar.

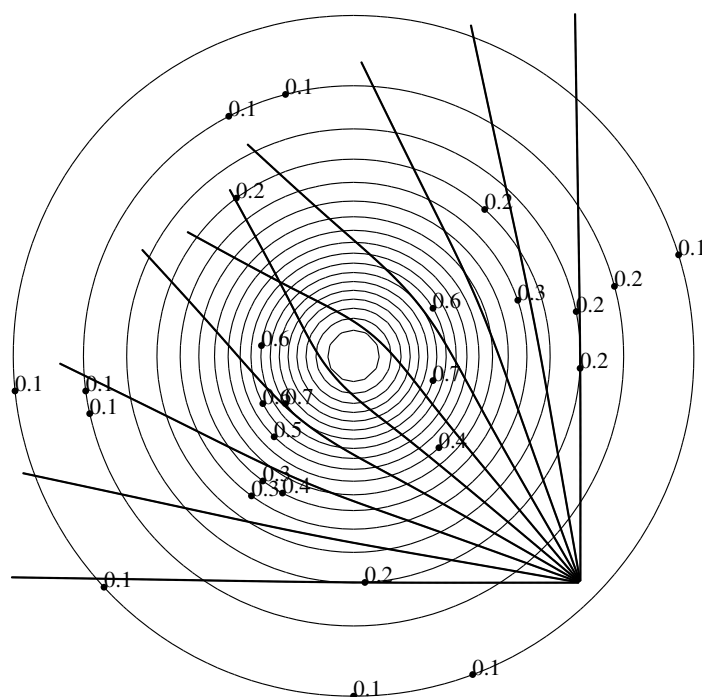
Ett intressant fenomen är två personer som följer två geodeter på en sfär, till exempel kan de starta på nordpolen och gå mot sydpolen längs olika ”räta linjer”. Deras väg kommer då att korsas vid sydpolen trots att ingen av dem skulle uppleva att de svänger.

En annan effekt är att vinkelsumman i en triangel inte blir två räta i krökta geometrier. Bilden nedan visar två trianglar på en sadelyta och en sfär. Triangelarnas sidor är geodeter.



Man kan definiera en geodet som en kurva vars tangentvektor inte avviker från kurvan om den förflyttas längs kurvan. Detta görs mer precist i avsnitt A.10. Uttrycket (A.13) är en differentialekvation vars lösning är en geodet givet en utgångspunkt och en utgångsriktning.

Den metrik vi konstruerade i exempel 4.1.1 är uppenbart krökt. Nedan visas ytan som höjdkurvor för området $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$ samt några geodeter som utgår från punkten $(2, -2)$. Om du skulle tillverka en modell av denna yta och på något vis få myror att gå "rakt fram" längs ytan från $(2, -2)$ åt de håll som visas skulle deras vägar beskrivas av figuren nedan.



Dessa kurvor är alltså lösningar till A.13 för startpunkten $(2, -2)$ och några olika riktningar.

4.5 Övningar

1. Låt $f(x, y) = 2x - x^2y + 3y$. Bilda $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$.

- Låt $f(x, y) = 2x - x^2y + 3y$. Välj några värden på $y = a$ för några värden på a och rita kurvorna $y = f(x, a)$ för dessa värden på a . Verifiera också att dessa kurvor har tangenter som ges av $\frac{\partial f}{\partial x}$ då $y = a$. Välj sedan några $x = b$ och gör samma sak.
- Verifiera att uttrycken (4.5) och (4.6) stämmer. (Genomför alltså deriveringarna själv!)
- Låt $ds = \frac{dx}{x^2}$ vara en metrik på \mathbb{R} , $x > 0$. Beräkna avståndet mellan $x = 1$ och $x = 4$ i denna metrik. Beskriv vad metriken betyder. (Välj gärna andra par av punkter så blir det kanske lättare att beskriva metriken innebörd.)

Facit

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 2xy$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 + 3$.
-
-
- Punkter som ligger nära $x = 0$ ligger långt ifrån varandra, medan punkter för stora x ligger nära varandra.

$$L = \int ds = \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

5 En platt rumtid – SR

I den speciella relativitetsteorin, SR, ges olika observatörer var sitt koordinatsystem. Skillnaden mellan dessa är att de rör sig relativt varandra, vilket resulterar i att de upplever tid och avstånd olika.

Ett centralt begrepp är begreppet *händelse*. Om något händer är det vid en viss tid och på en viss plats. En händelse är alltså en punkt i rumtiden.

Om observatören med koordinatsystem (t', x') rör sig med hastigheten v relativt ”oss” med koordinatsystem (t, x) får vi

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.1)$$

Vi upplever att alla processer går långsammare för den som rör sig relativt oss. När det gått en tid $\Delta t'$ i det system som rör sig, har det alltså gått en längre tid Δt för oss. Detta betyder att avståndet i tiden mellan två händelser inte är lika för två observatörer.

Ett annat resultat är att om vi tittar på ett system som rör sig och mäter en längd till Δl så är den inte lika stor som motsvarande längd $\Delta l'$ i systemet som rör sig enligt

$$\Delta l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta l'. \quad (5.2)$$

Avståndet i rummet mellan två händelser är alltså inte heller lika för olika observatörer.

Andra resultat är att två observatörer inte upplever energi och rörelsemängd lika, inte effekt och kraft lika och inte elektriskt respektive magnetiskt fält lika. Vi fördjupar oss dock inte i dessa begrepp i denna text.

Det som däremot *är* lika för alla observatörer är avståndet i rumtiden mellan händelser. Den metrik som gäller på rumtiden (långt frång stora massor) är

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

men för våra exempel räcker det att studera en rumsdimension. Den metrik vi skall använda är

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2. \quad (5.3)$$

Detta är i strikt matematisk mening inte en metrik eftersom det finns skilda punkter med avstånd noll mellan varandra. Metriker som dessa benämns ibland semimetriker, men i SR slarvar man och använder ordet metrik även för detta uttryck.

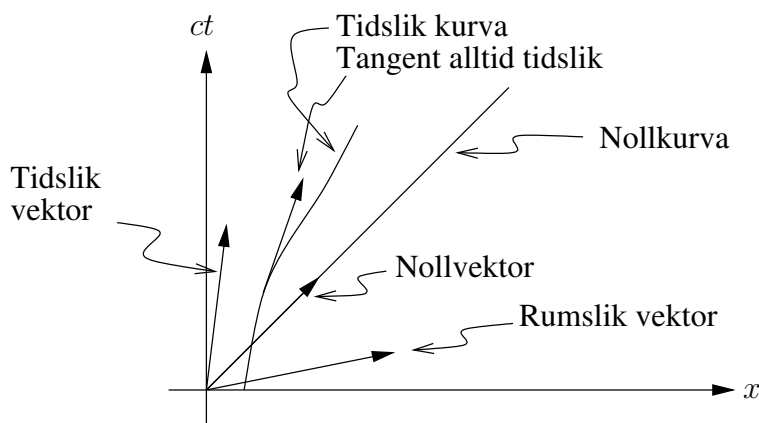
Vektorbegreppet fungerar i denna metrik precis som i den euklidiska. Man adderar två vektorer och multiplicerar med tal på oförändrat sätt. Däremot innebär denna metrik att begreppet skalärprodukt definieras något annorlunda.

Om \mathbf{A} och \mathbf{B} är två vektorer i rumtiden ges skalärprodukten mellan dem av

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = -c^2 A_t B_t + A_x B_x.$$

Det intressanta är att studera vad $\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle$ är, eftersom detta uttryck kan både bli negativt och noll för andra vektorer än nollvektorn. En vektor \mathbf{V} benämns *tidslik* om $\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle < 0$, *rumslig* om $\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle > 0$ och *nollvektor* om $\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle = 0$.

Dessa namn används även om kurvor. En kurva vars tangentvektor alltid är tidslik benämns också tidslik. Att tangentvektorn är tidslik betyder också att $ds^2 < 0$ längs kurvan. Man pratar på samma sätt om nollkurvor och rumsliga kurvor.



Att beräkna längden av en kurva enligt

$$\int ds = \int \sqrt{ds^2}$$

kan tyckas bli lite knepigt eftersom uttrycket under rottecknet kan bli negativt. Lösningen är mer fysikalisk än matematisk. I SR, och GR, gäller nämligen att ljus rör sig längs nollkurvor och massiva partiklar längs tidslika kurvor. En fysikaliskt acceptabel kurva är antingen det ena eller det andra och kan alltså inte övergå från att vara tidslik till att bli rumslig eller tvärt om.

För rumsliga kurvor uppstår inte detta problem, då är det frågan om vanliga avstånd som varken är komplexa tal eller ens negativa reella tal.

Om du stött på Lorentztransformation ur ett matematiskt perspektiv kan nämnas att den transformation bevarar normen av en vektor, och därmed normens tecken. En Lorentztransformation kan alltså inte ändra på huruvida en vektor är rumslig, tidslik eller noll.

Ett intressant specialfall är att tänka på en observatör som själv hela tiden befinner sig vid en fix rumskoordinat. Den observatören färdas längs den tidslika kurva som bara har en tidskomponent. När tiden går förändras bara tidskomponenten för observatören. Observatören själv mäter upp att tiden går, vilket leder till att definiera att *egentiden* för en observatör som färdas längs en tidslik kurva i rumtiden är

$$c\tau = \int \sqrt{-ds^2},$$

eller kortare $c^2 d\tau^2 = -ds^2$.

Faktorn c finns med för att $d\tau$ är en storhet i tiden, medan ds är en storhet i rummet. I många böcker sätter man $c = 1$ för att få vackrare uttryck, men då måste läsaren själv förstå att när likhet tycks råda mellan storheter av olika slag är det inte frågan om lika slags storheter.

Vi skall nu härleda (5.1) på ett sätt som liknar sättet vi räknade ut längden av en kurva i 3.3. Låt en observatör följa en kurva som parametriseras enligt

$$x(t) = vt \quad \Rightarrow \quad dx = vdt.$$

När observatören har rört sig längs denna kurva mellan koordinattiderna t_1 och t_2 har observatören mätt upp sin egentid till

$$c\tau = \int \sqrt{-ds^2} = \int \sqrt{c^2 dt^2 - v^2 dt^2} \quad (5.4)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} c \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} dt \quad (5.5)$$

$$= c \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \Delta t. \quad (5.6)$$

Detta är samma uttryck som 5.1, men med lite annan notation. Det är också en lite annan utgångspunkt. När man börjar studera SR tänker man på "sitt eget" koordinatsystem (ofta x - t -systemet), och "det koordinatsystem som rör sig" (ofta x' - t' -systemet).

I GR har man *ett* koordinatsystem som är helt oberoende av alla observatörer. Du kan tänka på det som om någon inför ett koordinatsystem utifrån. Olika observatörer far omkring i systemet och vardera har de med sig en klocka som tickar fram dess egentid.

Beräkningen ovan visar en viktig teknik som vi skall använda några gånger. En observatör rör sig i rumtiden där det finns en metrik. Observatören själv upplever bara en rörelse i tiden och längden av kurvan upplevs bara som tid. "Vi andra" kan se det hela "utifrån" och beräknar längden av samma kurva med koordinatsystemet. Längderna är naturligtvis lika eftersom det är samma kurva. På så vis relateras observatörens upplevda tid till rörelsen i koordinatsystemet.

5.1 Övningar

1. Antag att en händelse ges av att du går upp ur din säng på morgonen och att en annan händelse är att du kommer fram till skolan strax innan dagens första lektion. Är vektorn (i rumtiden) som ges av dessa händelser tidslik, rumslik eller noll?

Facit

1. Den måste vara tidslik. Du färdas långsammare än ljuset!

6 Schwarzschildmetriken

6.1 Bakgrund

Som nämndes i inledningen är GR en uppsättning differentialekvationer på tensorform enligt

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}.$$

Högerledet är ett tensorfält som beskriver hur energi och massa är fördelat och rör sig i rumtiden. Vänsterledet innehåller tensorn G_{ab} som i sin tur innehåller derivator av metriken. Differentialekvationernas lösning är metriken.

Eftersom dimensionen på rumtiden är fyra fås 16 obekanta funktioner och 16 st kopplade differentialekvationer. Av symmetriskäl reduceras problemet något, men det är fortfarande mycket komplicerat.

6.2 All massa i centrum

Einstein själv trodde inte att det skulle vara möjligt att lösa sina differentialekvationer, men hoppades på att man skulle kunna utföra numeriska approximationer. Lyckligtvis kan man göra vissa förenklingar. Till exempel kan man anta att universum bara består av en enda kropp som har all massa i en enda punkt som vi tar som origo. Det kan tyckas som en för stor förenkling av verkligheten, men det stämmer väl för situationer där man tar centralkroppen som en stjärna eller en planet. År 1916 presenterade Schwarzschild⁵ en lösning i detta enklaste fall.

Lösningen är fortfarande för komplicerad för att falla inom ramen för denna text, men den går ut på att man först använder polära koordinater för rumsdelen i rumtiden (t, r, θ, ϕ) . Eftersom rumsdelen av rumtiden är rotationssymmetrisk runt den centrala massan kan metriken bara bero på tiden och på radien. Metriken kan inte heller bero på tiden. Man kan då ansätta en metrik på formen

$$ds^2 = a(r)dt^2 + b(r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

där det endast återstår att finna de obekanta funktionerna $a(r)$ och $b(r)$.

Detta uttryck sätter vi in i (A.12) som sätts in i (A.10) och (A.11) som sätts in i (A.9) som sätts in i vänsterledet i (A.8). Högerledet av (A.8) är identiskt noll för $r > 0$ för den punktformiga massan. Kvar blir en differentialekvation som går att lösa. Lösningen till denna är metriken

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.1)$$

där $r_S \equiv \frac{2GM}{c^2}$ benämns *Schwarzschildradien*.

Övning: 1

Sätter man in data i detta uttryck får man $r_{S\odot} = 2.95 \cdot 10^3$ m och $r_{S\oplus} = 8.87 \cdot 10^{-3}$ m. Som synes är dessa radier väl innanför respektive himlakroppens yta, så vi behöver inte bekymra oss för divisioner med noll. Innanför ytan gäller inte den enkla modellen att all massa är samlad i centrum.

Det finns kroppar som är mindre än sin Schwarzschildradie, de benämns svarta hål. Det blir mer om dessa i avsnitt 7.3.

⁵1873 – 1916, död i första världskriget vid den ryska fronten

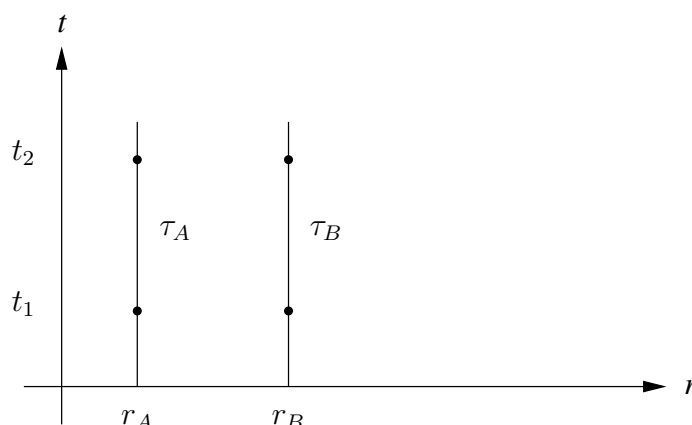
Tillvägagångssättet för att få Schwarzschildmetriken är viktigt. Vi skall upprepa samma resonemang då vi studerar kosmologi. I A.7 beskrivs att man löser fältekvationerna (A.8) och får en metrik. Det är dock svårt/omöjligt i ett allmänt fall. Av symmetriskäl kan man ibland förstå att metriken inte kan se ut hur som helst. Ett uttryck för metriken som uppfyller vissa krav sätts istället in i fältekvationerna. Dessa löses sedan så att man får ut de obekanta delarna av metriken.

6.3 Några enkla kurvor

Konstant r

Den enklaste möjliga kurvan i rumtiden att studera i denna metrik är den som beskriver något som har samma rumskoordinat vid alla tidpunkter. Du följer en sådan kurva om du står still på jordytan.

Antag att två observatörer A och B befinner sig vid olika rumskoordinater r_A respektive r_B . De har båda var sin klocka som visar deras egentider τ_A respektive τ_B . Figuren nedan visar deras kurvor i rumtiden mellan koordinattiderna t_1 och t_2 .



Att de har samma rumskoordinat innebär att $dr = d\phi = d\theta = 0$.

De upplever längden av dessa kurvor som tid och precis som i resonemanget som föregick 5.4 får vi

$$c\Delta\tau = \int \sqrt{-ds^2} = \int_{t_1}^{t_2} c\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}} dt \quad (6.2)$$

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}(t_2 - t_1) = \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}\Delta t \quad (6.3)$$

Vi ser att förändringen av egentid är mindre än förändringen av koordinattid. För de två observatörerna, som ju har samma förändring i koordinattid, gäller

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_A}}}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_B}}} \quad (6.4)$$

Om $r_A < r_B$, som i figuren ovan, får vi alltså att $\Delta\tau_A < \Delta\tau_B$. Då observatör A upplever att det gått en tidsenhet, upplever observatör B att det gått längre tid.

Teoretiskt skulle det alltså till exempel vara bra att förvara saker man vill bevara i sin källare. De åldras inte lika fort där. Omvänt skulle det vara bra att förvara saker man vill ligga och mogna på sin vindsvåning. Där går tiden fortare.

De praktiska effekterna av detta är mycket små på jordytan. Jordens radie är mycket större än r_S för jordklotet så skillnaderna blir inte så stora. Men det är mätbart och har betydelse för kommunikationssatelliter som både måste vara mycket exakta i sin tidsmätning och befinner sig mycket längre ut i jordens gravitationsfält.

Det är intressant att undersöka hur detta fenomen upplevs på långt avstånd. Låt $r_B \rightarrow \infty$. Då fås

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_\infty} = \sqrt{1 - \frac{r_S}{r_A}}$$

Övning: 4

Om vi tänker oss någon sänder ut ljus med våglängden λ_A från r_A kommer ljuset få en annan våglängd λ_∞ borta i oändligheten. Överallt skall $\lambda f = c$ gälla, så vi får

Övning: 4

$$\begin{aligned} \lambda_A f_A &= \lambda_\infty f_\infty \\ \frac{2\pi\lambda_A}{T_A} &= \frac{2\pi\lambda_\infty}{T_\infty} \\ \lambda_A \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_A}}} &= \lambda_\infty \end{aligned}$$

Vi (som befinner oss långt från r_A) upplever att ljuset har ”dragits ut” eftersom våglängden ökat. Detta fenomen benämns *gravitationell rödförskjutning* och är ett annat fenomen än kosmologisk rödförskjutning och rödförskjutning på grund av dopplereffekten.

Observera att kurvorna som de två observatörerna följer i rumtiden inte är lösningar till (A.13), de är inte geodeter. Om inga krafter verkar på en kropp accelererar den in mot centralkroppen. För att det inte skall ske måste en kraft verka på kroppen. För en lämplig kraft skulle dessa kurvor alltså kunna vara lösningar till (A.14).

Konstant t

En annan enkel kurva att studera är längden mellan två koordinatavstånd r_A och r_B . Detta är ett rumsavstånd L som ges av

$$L = \int ds = \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}} \quad (6.5)$$

$$= \left[\frac{r_S \ln \left(\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}} + 1 \right)}{2} - \frac{r_S \ln \left(\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}} - 1 \right)}{2} + r \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}} \right]_{r_A}^{r_B} \quad (6.6)$$

Övning: 5

Den primitiva funktionen ser hemsk ut. Man kan dock se att $L \neq r_B - r_A$ vilket man kan förstå redan ur integranden. Eftersom varje ds är lite längre än motsvarande dr går det åt ”fler” dr för varje ds . Alltså gäller $L > r_B - r_A$

Vi skall se att detta får betydelse då vi studerar fall in mot svarta hål.

Nollkurvor

Nollkurvor, som ljus följer, är inte så komplicerade att analysera. Eftersom $ds = 0$ för sådana kurvor får vi likheten

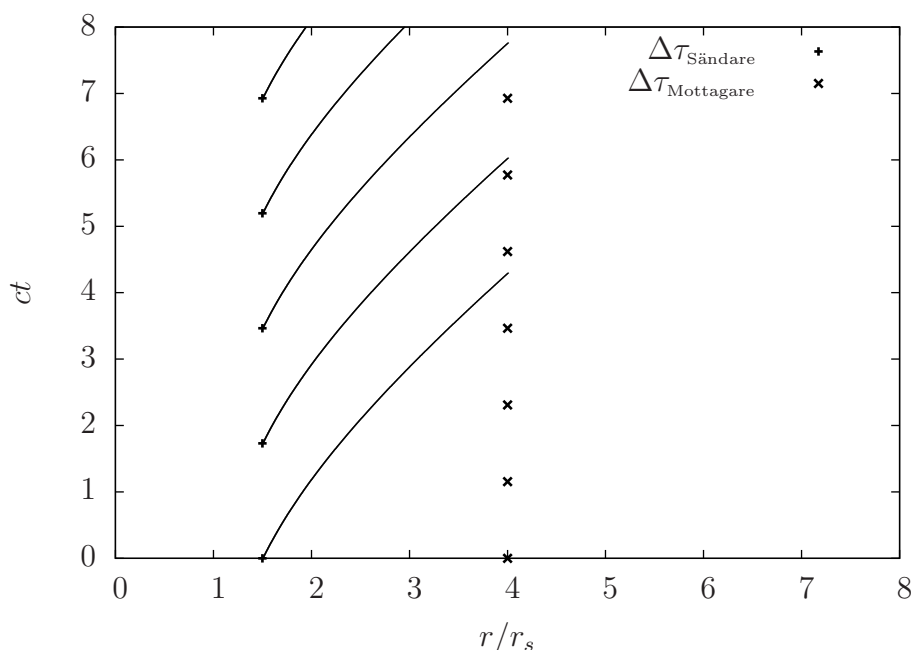
$$cdt = \frac{dr}{1 - \frac{r_S}{r}}$$

ur (6.1) för utåtgående kurvor. Detta är en separabel differentialekvation vars lösning är

$$t(r) = \frac{1}{c} \left(\ln \left(\frac{r - r_S}{r_0 - r_S} \right) r_S - (r - r_0) \right)$$

där $t(r_0) = 0$. Med hjälp av dessa kan vi få en bild av att egentiden går olika fort för observatörerna i r_A respektive r_B i vårt första exempel.

Grafen nedan visar en situation där $r_A = 1.5 r_S$ och $r_B = 4 r_S$. Sändaren i r_A sänder ut ljuspulser en gång per sekund. Det som är markerat är de händelser då respektive observatörs egna klockor har tickat fram en tidsenhet (tänk sekund).



Övning:6

Vi ser att det tar 1.5 gånger så lång egentid för mottagare mellan det den tar emot signaler jämfört med egentiden för sändaren mellan det att denne sänder ut signaler. Då den inre observatörens klocka tickat fram två gånger, har den yttres klocka tickat tre gånger.

6.4 Planetbanor

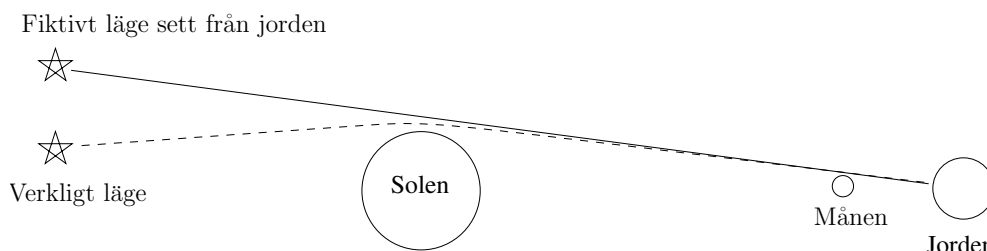
Ett intressant problem är att studera om det finns bundna banor kring en massiv centralkropp. Det gör det naturligtvis, planeterna går ju uppenbarligen i sina banor runt solen. I GR kan man härleda uttryck för banorna precis som man kan i den Newtonska mekaniken. Andra resultat, som Keplers lagar, följer av den senare.

Att härleda uttryck för banorna faller utom ramen för denna text i båda teorierna. Däremot är det intressant att känna till att man vid 1800-talets slut kände till att Merkurius bana inte riktigt följde den bana som Newtons mekanik förutsade. Ellipsen vrider sig runt solen något. Trots att man kompenserade för störningar från övriga planeter fick man inte teorin att gå ihop med verkligheten. De banor som GR förutser stämmer dock.

6.5 Gravitationslinser

Ett intressant resultat i GR är att även nollkurvor, banor som ljus följer, är krökta. Om en ljusstråle sveper förbi centralkroppen böjer den av enligt figuren nedan. Fenomenet är för komplicerat för att reda ut matematisk i denna text, men det finns intressanta tillämpningar.

Fenomenet är historiskt intressant eftersom detta var en av de första fenomen som observerades experimentellt. Detta gjordes 1920 av en engelsk forskargrupp. Man observerade att ljuset från en stjärna böjde av runt solen så att den kunde observeras från jorden. Det var möjligt att se detta under en solförmörkelse.



Verifieringen fick stor politisk betydelse eftersom det just hade varit ett världskrig vid denna tid. Då en engelsk forskare gav stöd åt en tysk teori kunde teorin knappast vara falsk! Senare analyser av mätresultaten har visat att den engelska gruppen inte hade tillräcklig mätnoggrannhet för att egentligen kunna ge stöd åt teorin.

Fenomenet är verifierat på olika flera olika skalor. Tittar man långt bort i universum ser man att ljuset böjer av runt galaxer så att bilden av bakomliggande galaxer blir förvrängd.

Kroppen som böjer av ljuset fungerar som en jättelik lins, varför man pratar om *gravitationslinser*.

6.6 Övningar

1. Verifiera att Schwarzschildradien för jorden och solen är vad som påstås i texten.
2. Beräkna hur mycket mer egentid som förflyter uppe på ett berg med höjden 8000 m, jämfört med ett år vid havsnivå.
3. Satelliterna för GPS åker runt jorden på höjden 20 000 km ovanför jordytan. Hur mycket "längre" är en sekund för en GPS-satellit jämfört med en sekund för oss på jordytan? Jämför detta med hur lång tid det tar för ljuset att färdas från en GPS-satellit till jordytan.
4. Abel och Berit vill kommunicera med sina vänner som befinner sig mellan solen och vår närmsta stjärna. Abel tar hänsyn till att signalen skickas från jorden då han gör sina beräkningar rörande till exempel hur ljuset rödförskjuts under sin resa ut ur jordens gravitationsfält. Berit tar istället hänsyn till att ljuset skall ut ur solsystemet. Vilken effekt blir störst?
5. Beräkna avståndet mellan jordytan och något som befinner sig på koordinaten $r = 5 \cdot \text{jordradien}$.
6. Beräkna att skillnaden i tid verkligen skiljer sig åt med en faktor 1.5 i gafen på sida 24.

Facit

1. -
2. Det går ca $2.75 \cdot 10^{-5}$ s mer egentid uppe på berget. Mer precist: Om två perfekta klockor visar samma tid vid en punkt på jordens medelradie 6371 km, och en av dem flyttas till bergets topp och den får ligga där under ett år ($60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365$ s) för att sedan flyttas ned igen, så går den som fått ligga på berget $2.75 \cdot 10^{-5}$ s före den som varit vid medelradien hela tiden.
3. Det tar ljuset ca 0.0667 s att färdas från satelliten. Förhållandet mellan en sekund på satelliten och en sekund på jorden är 1.000000000527806. Det är inte så stor skillnad, men ljuset hinner ungär 15 cm på tidsskillnaden. Om man inte tar hänsyn till relativistiska effekter skulle GPS-systemet inte fungera.
4. Ingen effekt blir speciellt stor, men den från solen är ca 10 ggr större. Om det utsända ljuset har våglängden λ_0 får det mottagna ljuset våglängden $1.000000000695938\lambda_0$ enligt Abels beräkning medan det har våglängden $1.0000000009870015\lambda_0$ enligt Berits beräkning.
5. Använd 6.6.
6. -

7 Svarta hål

7.1 Allmänt

Svarta hål är kroppar som har kollapsat till en kropp som är mindre än dess Schwarzschildradie. Vi skall strax se att om det händer så samlas all massa i centrum, så vi kan tänka på ett svart hål som något som har oändligt liten utsträckning, som en punkt i matematiken.

Svarta hål kan också ha laddning och de kan rotera, men vi behandlar inte dessa fall här. Ett oladdat svart hål som inte roterar beskrivs av en enda parameter, nämligen dess massa.

Det finns⁶ två sorters svarta hål.

En typ uppstår när en massiv stjärna dör. För att ett svart hål skall bildas måste stjärnan vara så stor från början att den slutar i en supernova, och dessutom så stor att det inte bildas en neutronstjärna. Mycket materia kastas ut i supernovan, så det svarta hålet blir betydligt lättare än stjärnan som kollapsade. Typiskt blir stjärnor med massor över $10M_{\odot}$ svarta hål. Det lättaste svarta hålet har en massa på ca $3.8M_{\odot}$ ⁷ och det tyngsta ca $15.56M_{\odot}$ ⁸. Detta skall jämföras med att vi upptäckt flera stjärnor med massor över $100M_{\odot}$.

Den andra typen är så kallade supermassiva svarta hål (Super Massive Black Hole, SMBH) och finns i centrum av galaxer⁹ och har massor på typiskt¹⁰ 10^6M_{\odot} . Det är oklart hur dessa har formats.

Det är en myt att svarta hål skulle ”suga i sig” allt runt omkring dem med en ”oändlig gravitationskraft”. Långt borta från det svarta hålet påverkas man av en kraft som beskrivs mycket väl av Newtons gravitationslag. En planet skulle kunna kretsa runt hålet precis som jorden runt solen. Så gör stjärnorna runt det SMBH som finns i Vintergatans centrum. Att notera hur dessa stjärnor rör sig är ett sätt att bestämma massan för det svarta hålet.

I GR gäller Schwarzschildmetriken 6.1 utanför det svarta hålet, men eftersom det som formar rumtiden är punktformigt ligger Schwarzschildradien utanför kroppen. Vi kan alltså åka innanför den, men det är inte en så bra ide.

Till exempel ser du att om $r < r_S$ byter de två första termerna i 6.1 tecken, vilket gör att en tidslig vektor blir rumslik och tvärt om. Det betyder att om man kommer innanför Schwarzschildradien för en kropp får man en påtvingad rörelse in mot mitten som inte går att hindra på samma sätt som vi inte kan hindra att vi färdas i tiden.

Det är denna effekt som har gett upphov till de svarta hålens dåliga rykte. På så vis är det alltså inte någon kraft som drar in kroppar mot det svarta hålets centrum. Det är rumtidens struktur som har ändrats.

Detta gäller även ljuset. Även nollkurvor med en utgångspunkt där $r < r_S$ leder in

⁶Små svarta hål av en tredje typ som inte beskrivs i texten kanske finns. De skulle ha bildats tidigt i universums utveckling, men dess existens har inte bekräftats.

⁷XTE J1650-500

⁸M33 X-7

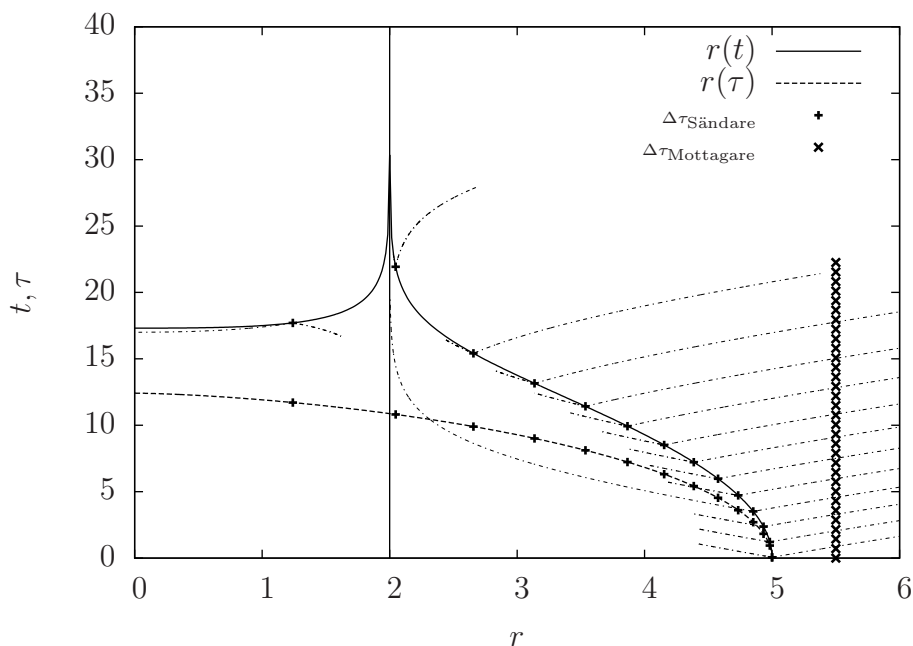
⁹Det är inte känt om det finns ett SMBH i alla galaxer, men det är troligt att de finns i alla större galaxer.

¹⁰Det i Vintergatans centrum har en massa på $4.31 \cdot 10^6 M_{\odot}$. Det mest massiva som upptäckts har en massa på $2.1 \cdot 10^{10} M_{\odot}$

mot $r = 0$. Inte ens ljuset kan komma ut, vilket har gett de svarta hålets dess namn.

7.2 Fritt fall in mot ett svart hål

För att förstå vad som händer om man faller in mot ett svart hål studerar vi någon som vi låter falla fritt från $r = 5.0$ mot ett svart hål med $r_S = 2$. Vi låter vår stackare sända signaler med lika lång egentid mellan dem. En signal skickas alltid innåt och en utåt. Vi står tryggt och tittar på vid $r = 5.5$.



På grund av faktorn $1 - \frac{r_S}{r}$ i Schwarzschildmetriken blir inte kurvorna så lätta att tolka, men belyser återigen en viktig sak att förstå med GR: *Man kan inte dra någon slutsats från att bara studera vilka koordinater något har, eller hur de beror av varandra!*

Vill man veta hur långt någon färdats och hur lång tid denne tycker att resan tagit, måste man parametrisera kurvan och beräkna kurvans längd och den egentid som förflutit för den aktuella observatören.

När vår testperson faller in mot det svarta hålet går $t \rightarrow \infty$ då $r \rightarrow r_S$, men dess egentid gör *inte* det. Den som faller in mot ett svart hål märker inget speciellt¹¹, färden slutar vid $r = 0$ inom ändlig tid, i detta exempel efter lite mer än att den sänt ut 13 signaler.

Vi som tittar på tar emot signalerna efter allt längre och längre tid. Punkterna som har $r = 5.5$ har tidskoordinater som motsvarar lika lång egentid som egentiden mellan de utsända signalerna. Den sist utsända signalen innan offret passerar r_S tas emot efter 38 tidsenheter.

Vi skulle också se att signalerna var rödförskjutna (detta syns dock inte i grafen). Den första signalen skulle ha 3% längre våglängd och den sista 427% längre våglängd.

Övning: 1

De ingående signalerna skulle också få en tidskoordinat som skulle gå mot oändligheten utan att det skulle betyda något. För att inte göra figuren så otydlig ritas bara den fjärde ingående signalen ut så länge att detta syns.

¹¹Förutom en tidvatteneffekt som vi återkommer till.

Vår testperson är utom all räddning när den har passerat r_s . Som tidigare nämnts leder resan in mot $r = 0$ på samma sätt som att tiden går för oss. En intressant sak att notera är att tidskoordinaten faktiskt *minskar* när egentiden ökar. Signalernas kurvor blir mycket svårtolkade i detta koordinatsystem. Eftersom koordinattiden går bakåt för vår testperson har även signalkurvorna ritats bakåt i koordinattiden.

Den utåtgående signalen går mot $t = -\infty$, men det betyder ingenting i sig. Eftersom tiden inte går för ljus (de följer nollkurvor) kan man inte rita ut ljusets egentid som vi gjort för vår observatör.

Man kan få en lite (matematiskt) klarare bild av hur ljuset beter sig innanför Schwarzschildradien genom att göra ett koordinatbyte. Trots att man slipper vissa egenheter som divisioner med noll och bakåtgående tidskoordinat, så blir bilden dock inte speciellt intuitiv.

Man vill ju uppenbart få bort faktorn $(1 - \frac{r_s}{r})^{-1}$ i dr termen. Då kan man införa någon annan funktion $v(r)$ så att kedjeregeln ger $dr = \frac{\partial r}{\partial v} dv$ där $v(r)$ har valts så att $\frac{\partial r}{\partial v}$ tar ut $(1 - \frac{r_s}{r})^{-1}$. Detta går att göra på många olika sätt, men alla är långt mer avancerade än målet för denna text.

Parametrarna i detta exempel är valda så att figuren blir någorlunda illustrativ. I SI-enheter skulle egentiden för den som faller (från $r = 5r_s$) in mot ett svart hål med solens massa vara ca 10^{-5} s medan det skulle ta ca 1 minut att fall in mot ett SMBH.

Det finns dock en effekt kvar att begrunda innan vi själva hoppar ner i ett svart hål. En verklig testperson är inte punktförmig. Om vi antar att denne hoppar ner med fötterna först, kommer fötterna uppleva större acceleration ned i hålet än huvudet. Ju närmare $r = 0$ testpersonen kommer desto större blir skillnaden. Förr eller senare skulle kroppen dras isär av denna effekt.

7.3 Övningar

1. Uppskatta olika r i figuren på sida 28 och verifiera att rödförskjurningen är vad som anges i texten.
2. Betäm ett uttryck för hur mycket potentiell energi som frigörs vid ett fritt fall från oändligheten till r_s för ett svart hål enligt *Newtons* gravitationslag.

Facit

1. Figuren kanske är svår att läsa av, men den sista signalen som skickas ut innan Schwarzschildradien passeras har koordinat $r = 2.047$.
2. Ledning: Energin ges av

$$E = \int_{\infty}^{r_s} -\frac{GMm}{r^2} dr$$

där M är massan för det svarta hålet. En slutsats är att *väldigt* mycket energi frigörs då något faller fritt. Begrunda att endast någon procent av all tillgänglig energi frigörs vid kärnreaktioner.

8 Kosmologi

8.1 En symmetrisk metrik

Om Schwarzschildmetriken är ena ytterligheten av olika sorters universa, är den andra ytterligheten att man betraktar hela universum som en homogen och isotrop gas av galaxer som bara växelverkar med varandra genom gravitationen. I detta universum finns också strålning och vakuum som båda är homogena och isotropa.

Med homogen menas att det finns lika mycket (galaxer, strålning, vakuum) i varje punkt och isotrop betyder att universum är lika åt alla riktningar. Gasen strömmar till exempel inte åt något speciellt håll.

Den metrik som är förenlig med dessa villkor är

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (8.1)$$

där

$$k = \begin{cases} 1 & \text{Slutet} \\ 0 & \text{Platt} \\ -1 & \text{Öppet} \end{cases}$$

Fallet *slutet* betyder att universum går att tänka på som ytan av en ballong i fyra rumsdimensioner där $a(t)$ är klotets radie. Det betyder också att universum i detta fall har ändlig volym och att man teoretiskt skulle kunna komma tillbaka till sin utgångspunkt om man färdades rakt fram tillräckligt länge (därför namnet slutet).

Universum är i matematisk mening elliptiskt och vinkelsumman på en jättelik triangel som ritades upp skulle bli mer än två räta vinklar. Alla parallella linjer skär varandra på en sådan punktmängd.

Det *platta* fallet syftar på att universum är Euklidiskt vilket betyder att vinkelsumman i en triangel är två räta. Universum är i detta fall oändligt stort. I detta fall finns det precis en linje genom en given punkt som är parallell med en given linje.

Namnet *öppet* syftar på att universum inte är slutet men betyder att universum är format som en sadelyta. Sådana punktmängder är hyperboliska och vinkelsumman i en triangel skulle bli mindre än två räta. Man kan också hitta oändligt många linjer genom en given punkt som är parallella med en given linje.

Det platta fallet är också öppet, men man brukar benämna det fallet platt för att skilja fallen åt.

I både det platta och öppna fallet kan man inte betrakta $a(t)$ som en radie, men jämför man med det slutna fallet får man tänka på universum som en gummiduk som dras ut där $a(t)$ är en skalfaktor som beskriver utvidgningen.

Frågan är vad $a(t)$ beror av och hur $a(t)$ ser ut. Eftersom detta är den enda obekanta storheten i metriken, beskriver den funktionen ensamt alla universums egenskaper¹².

Metriken ovan benämns Friedmann-Robertson-metriken. Observera att $a(t)$ inte nödvändigtvis måste beskriva ett universum. Om $a(t)$ väljs så att den gör det benämner man metriken Friedmann-Robertson-Walker-metriken, vilken förkortas FRW.

¹²Alla egenskaper universum kan tänkas ha som är förenligt med förutsättningarna för modellen. Om universum skall ha fler egenskaper måste modellen förfinas.

Den stora frågan är vi skall försöka besvara är hur beror $a(t)$ av fördelningen av energisorterna strålning, massa och vakuum.

Eftersom alla egenskaper för universum följer av metriken kan vi då räkna ut saker som när universum blev så kallt att atomer kunde bildas eller när universum blev genomskinligt.

Speciellt: $a(t)$ beror av universums temperatur, som påverkar hur fort olika partikelkollisioner sker och vilka som är möjliga. Dessa påverkar i sin tur $a(t)$. Med andra ord kopplas här egenskaper för den mikroskopiska världen till egenskaper för hela universum!

8.2 Slutet, platt eller öppet?

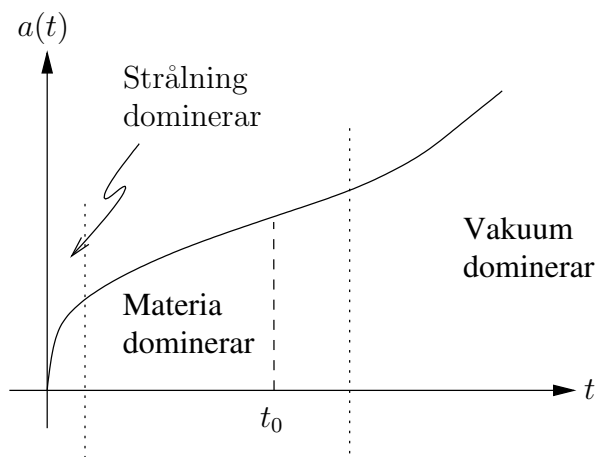
Det som avgör om universum är slutet, platt eller öppet är vilken sorts energi som dominerar i universum. De tre sorterna som är aktuella är materia (som vi betraktar som en energiform enligt $E = mc^2$), strålning (rester från Big Bang och tiden närmast därefter) och det som ibland kallas vakuumenergi eller mörk energi.

Det finns ingen teori som förklarar vad mörk energi skulle kunna tänkas vara, men matematiskt kan man lägga till en sådan term i fältekvationerna (vilket Einstein gjorde) eller så får man betrakta den tomma rymden som en sorts energiform i sig (vilket stämmer bättre med moderna tolkningar).

Förenklat kan man säga att materia drar ihop universum, medan mörk energi blåser upp universum. Ett universum som innehåller mycket materia i förhållande till de andra energiformerna kommer att bli slutet. För ett litet universum (strax efter Big Bang) verkar strålning expanderande på universum, men då universum expanderar dras även våglängden ut för strålningen så att den expanderande effekten inte blir så stor.

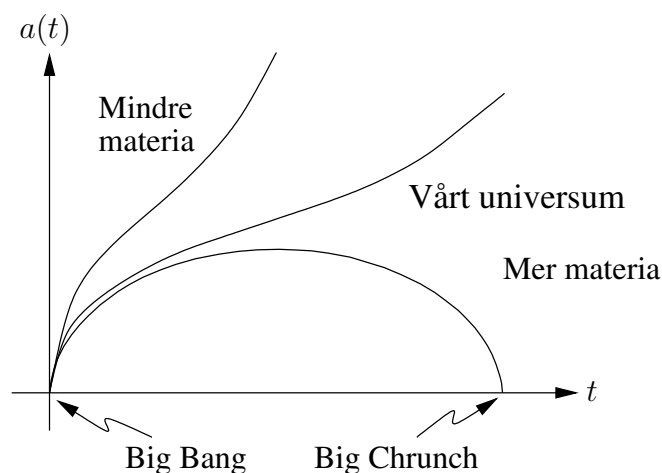
I olika epoker av universums historia har alltså olika energiformer varit (och/eller kommer att bli) olika viktiga.

Vi skall härleda en differentialekvation för $a(t)$, men den lösning som stämmer med observationer är schematiskt skissad nedan. I denna gren av fysiken anger t_0 "nu".



Vi tycks leva i ett platt universum som kommer att utvidgas mer och mer. I själva verket kommer expansionen att accelerera i takt med att det blir mer och mer vakuum i förhållande till de andra energisorterna.

Om universum istället skulle haft lite mindre materia skulle utvidgningen gå fortare, och med lite mer materia så skulle universum få en maximal expansion för att slutligen dra ihop sig till en Big Crunch, motsatsen till Big Bang.



8.3 Rödsjift och Hubbles lag

Innan vi ger oss i kast med att ta fram uttryck för universums öde ägnar vi oss åt något mer jordnära.

En effekt denna metrik har är att avståndet mellan två punkter som har fix rumskoordinat faktiskt ändras med tiden. Detta trots att de alltså ligger still i universum. Vi måste alltså skilja mellan *koordinatavståndet* d_{koord} som kan vara konstant och det *verkliga* avståndet d . Sambandet mellan dessa är

$$d(t) = a(t)d_{\text{koord}}. \quad (8.2)$$

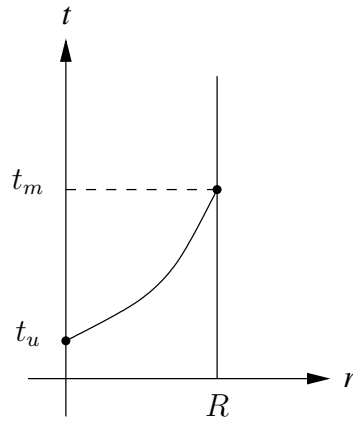
Om vi skickar ut någon att röra sig i universum måste vi också ta hänsyn till att universum ändras under tidens gång. Beräkningen för den sträcka som tillryggaläggs liknar alla exempel vi studerat hittills, men rumskoordinaten får nu också ett tidsberoende.

Hubble noterade 1929 att galaxer rör sig från oss och att farten ökar linjärt med avståndet. Detta fenomen benämns numera *Hubbles lag*,

$$v = H_0 d$$

där v är galaxens fart, d är avståndet till galaxen och H_0 är Hubbles konstant som är 72 ± 0.7 km/s/Mpc. Galaxen rör sig inte i universum, men universum utvidgas, vilket rödförskjuter ljuset.

Nu skall vi härleda Hubbles lag från metriken. Antag att vi sänder en ljuspuls från $r = 0$ vid tiden $t = t_u$ (u som i utsänd) till $r = R$ som tas emot då $t = t_m$ (m som i mottagen).



Ljuspulsen rör sig längs en nollkurva. Vi kan sätta $k = 0$ (betrakta universum som platt) eftersom vi studerar avstånd som är mycket små i förhållande till hela universum. Vi får

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dr^2 = 0$$

$$dr = \frac{c dt}{a(t)}.$$

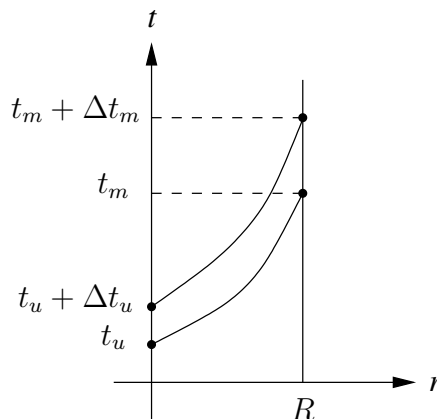
Vi integrerar båda led och får

$$\int_0^R dr = \int_{t_u}^{t_m} \frac{c dt}{a(t)}$$

$$R = \int_{t_u}^{t_m} \frac{c dt}{a(t)}. \quad (8.3)$$

Koordinatavståndet som ljuspulsen färdas är naturligtvis R . Om ljuspulserna sänts ut vid andra tidpunkter skulle koordinatavståndet fortfarande vara R . Detta skall vi nu utnyttja.

Antag att vi sänder ut två pulser. De sänds ut med tidsskillnaden Δt_u . Två ljuspulser som sänds ut vid t_u och $t_u + \Delta t_u$ mottas vid t_m och $t_m + \Delta t_m$.



På grund av att rumtiden har förändrats under tiden ljuspulserna färdats blir Δt_u inte lika stor som Δt_m . Däremot har de har åkt samma koordinatavstånd R . Därför fås

$$R = \int_{t_u}^{t_m} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{t_u + \Delta t_u}^{t_m + \Delta t_m} \frac{c dt}{a(t)}. \quad (8.4)$$

Eftersom Δt_m och Δt_u är små gäller

$$\frac{\Delta t_m}{a(t_m)} = \frac{\Delta t_u}{a(t_u)}.$$

Som en motivering till detta kan du tänka på följande uttryck, där ϵ är mycket litet

$$\int_a^{a+\epsilon} f(x)dx \approx f(a) \cdot \epsilon.$$

Eftersom ϵ är mycket litet ändras inte $f(x)$ så mycket mellan a och $a + \epsilon$. Detta används i "båda ändar" av integralen i (8.4).

Om vi tänker på ljuspulserna som ett visst antal våglängder (om Δt_u är periodtiden för den elektromagnetiska vågen blir det precis en våglängd). Det måste vara samma antal våglängder som sänds ut och som tas emot. Det ger

$$\omega_m \Delta t_m = 2\pi k = \omega_u \Delta t_u$$

Det *kosmologiska rödsiftet* z definieras som

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_m}{\lambda_u} = \frac{a(t_m)}{a(t_u)}.$$

Detta används i praktiken som ett avståndsmått. Att $z = 0$ betyder att ljuset inte är rödförskjutet, vilket betyder att det sänts ut "här" och "nu". När vi vardagligt säger att något befinner sig exempelvis två ljusår bort, menar vi den sträcka ljuset färdas på två år. Det ljus som vi mottar från en sådan plats är två år gammalt.

Men när vi har att göra med stora avstånd (kosmologiskt sett) kanske vi säger 10 miljarder ljusår. Då menar vi att ljuset vi mottar är 10 miljarder år gammalt, men under dessa 10 miljarder år har universum utvidgats. Därför befinner sig inte det som sände ut ljuset 10 miljarder ljusår bort. Menar vi då kanske *koordinatavståndet* tio miljarder ljusår? Eller något annat?

En sak vi kan vara säkra på är i alla fall hur mycket rödförskjutet ljuset är. Den informationen fås nämligen genom att studera spektrumet för till exempel en galax eller kvasar¹³ Tio miljarder ljusår motsvarar $z \approx 2$. Annars är vanliga avstånd i sådana här sammanhang $1 < z < 7$.

Om $d(t)$ är avståndet till något blir dess fart

$$v = \frac{d}{dt}d(t) = \frac{d}{dt}a(t)d_{\text{koord}}.$$

Men farten beror bara på universums expansion, d_{koord} beror inte av tiden. Därför fås

$$v = a'(t)d_{\text{koord}} = \frac{a'(t)}{a(t)}d$$

där vi åter har använt (8.2) i sista steget. Detta är Hubbles lag, om vi definierar

$$H \equiv \frac{a'(t)}{a(t)}. \quad (8.5)$$

¹³Kvasarer kallas också *aktiva galaxer* och är mycket ljusstarka galaxer. Kortfattat kan sägas att energi frigörs från materia som samlas runt ett SMBH och då blir varm (pga friktion). Luminositeten är typiskt 10 000 gånger så stor som Vintergatans. Se övning 2 i avsnitt 7.3.

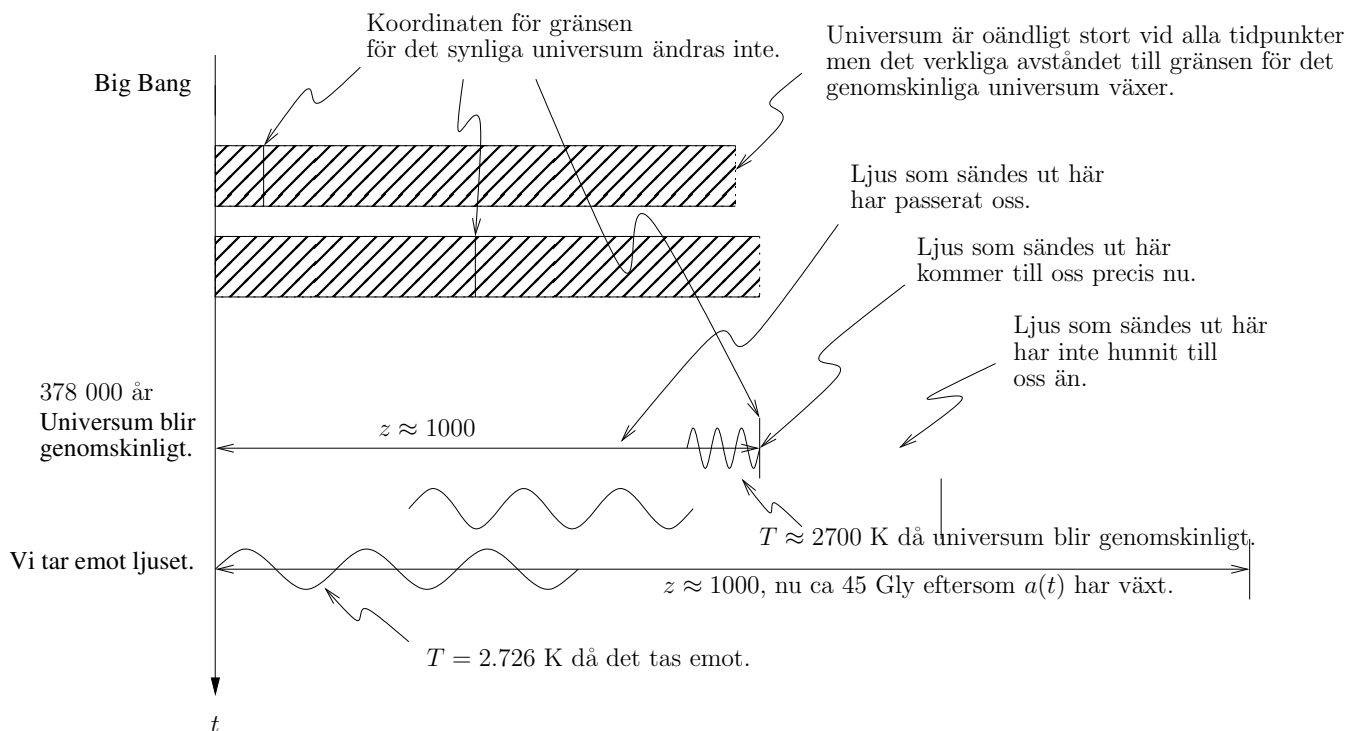
Eftersom $a(t)$ beror på t ändras värdet på H med tiden. Med H_0 menar man det värde H har nu, precis som t_0 anger det nuvarande värdet på tidskoordinaten.

Det kanske blir lättare att relatera till ett uttryck som

$$\frac{a'(t)}{a(t)}$$

om du jämför med fallet där $a(t) \sim e^{kt}$. Då blir kvoten mellan derivatan och funktionen helt enkelt k . Om universum skulle ha utvidgat sig exponentiellt sedan Big Bang skulle H_0 varit konstanten k , men som redan nämnts har alltså universum inte utvidgat sig lika fort hela tiden. Detta skall dessutom snart studeras och förklaras i detalj.

Figuren nedan visar schematiskt hur universum har expanderat sedan Big Bang. Ljus som sändes ut före universum blev genomskinligt absorberades direkt och finns inte kvar (det är ju det som menas med att något inte är genomskinligt).



När universum expanderat tillräckligt blev dess medeltemperatur tillräckligt låg för att atomer skulle kunna bildas av fria atomkärnor (protoner, deuterium, tritium och helium samt extremt lite av de närmast tyngre ämnena litium och beryllium) och elektroner. Då blev universum genomskinligt. Detta inträffade ca 378 000 år efter Big Bang.

Det ljus som då sändes ut har varit på väg mot oss i ca 13.4 Går. Universums expansion har dragit ut ljuset under dess färd mot oss till ca 1000 gånger dess ursprungliga våglängd. Vi uppmäter nu en medeltemperatur på ca 2.726 K i denna strålning.

8.4 Roadmap

Nu skall vi påbörja ett resonemang som är så långt att det kan vara bra att strukturera upp det i några punkter.

1. Det universum vi förutsätter består av tre saker: Vakuum (vilket även innefattar mörk energi), strålning (rester från värmestrålningen från big bang) och galaxer (som ett moln av damm). Universum är alltså som en homogen gas. När gaser utvidgar sig sjunker trycket och energidensiteten¹⁴. Vi måste först se hur $a(t)$ och energidensiteten hänger ihop.
2. Vi har postulerat en metrik (8.1). Denna skall vi sätta in i vänsterledet i Einsteins fältekvation (A.8).
3. Högerledet i Einsteins fältekvation (A.8) skall innehålla fördelningen av energi och massa i universum. Här skall vi sätta in svaret på vår första fråga.
4. Det vi får kvar kommer vara en enda differentialekvation vars lösning är $a(t)$.
5. Lösningen $a(t)$ kommer bara innehålla fyra parametrar; H_0 samt hur många procent av all energi i universum som är materia, strålning respektive vakuum. Observationer ger oss data på dessa parametrar som är förenliga med det vi ser.
6. I olika specialfall dominerar en viss sorts energislåg (exempelvis dominerade strålning tidigt efter Big Bang). Då blir differentialekvationen lösbar på gymnasienivå, och vi enkelt hitta lösningar som kommer att stämma väl med vissa epoker i universums historia.
7. Vill vi veta något om det universum vi lever i måste vi lösa differentialekvation numeriskt. Genom en serie smarta variabelbyten får vi en differentialekvation som är mer lätthanterlig. Detta visas, och vi beräknar avståndet till gränsen för det synliga universum.

8.5 Steg 1 – Olika sorters energi

Från termodynamiken känner vi

Förändring av energi i ett system = Värmefflöde – Arbete utförts av systemet.

Det brukar matematiskt skrivas

$$dE = Q - dW = Q - p dV.$$

Isotropin ger att värmefflödet Q är noll. Kvar blir

$$dE = -p dV.$$

Observera att alla tre storheter beror på tiden, och vi vill veta hur de förändras då tiden går. Vi skulle kunna dividera båda led med dt , så att vi får

$$\frac{dE}{dt} = -p \frac{dV}{dt}.$$

¹⁴Energidensitet och densitet betyder här samma sak eftersom materia och energi "är samma sak" enligt $E = mc^2$.

Om man inte är bekväm med detta¹⁵ kan man skriva om uttrycket och använda kedjeregeln enligt

$$\begin{aligned} dE &= -p dV \\ \frac{dE}{dV} &= -p \\ \frac{dE}{dt} \frac{dt}{dV} &= -p \\ \frac{dE}{dt} &= -p \frac{dV}{dt}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\tag{8.7}$$

Eftersom vi inte har något annat än massa i vårt universum (men observera att massan kan även utgöras av strålning enligt $E = mc^2$) gäller

$$dE = \rho c^2 dV \tag{8.8}$$

där ρc^2 är energidensiteten för universum. Energidensiteten är lika i alla punkter i universum, men beror på tiden.

Som en enkel följd av (8.2) fås att den fysikaliska volymen dV beror av skalfaktorn för universum enligt

$$dV = a^3(t) dV_{\text{koord}}. \tag{8.9}$$

När (8.8) och (8.9) sätts in i (8.6) fås

$$\frac{d}{dt} (\rho(t) c^2 a^3(t) V_{\text{koord}}) = -p(t) \frac{d}{dt} (a^3(t) V_{\text{koord}})$$

där vi även explicit noterat att trycket kan bero på tiden. Eftersom V_{koord} inte beror av tiden kan vi kanslera bort den faktorn och vi får

$$\frac{d}{dt} (\rho c^2 a^3(t)) = -p(t) \frac{d}{dt} (a^3(t))$$

Detta uttryck relaterar alltså massa- och energidensiteten till $a(t)$. Nu återstår att reda ut hur $a(t)$ blir i olika specialfall.

Materia

För materia skulle trycket vara noll, vilket ger

Övning: 1

$$\frac{d}{dt} (\rho c^2 a^3(t)) = 0. \tag{8.10}$$

Integreras båda led fås efter att integrationskonstanten bestämts

$$\rho_m(t) = \rho_m(t_0) \frac{a^3(t_0)}{a^3(t)}. \tag{8.11}$$

Strålning

Från andra delar av fysiken kan man härleda att för strålning (vi använder indexet r som i radiation) gäller

$$p_r = \frac{1}{3} c^2 \rho_r.$$

¹⁵Det ser ju lite ut som en tidsderivata, men varför har inte p deriverats?

Det gäller även att

$$\rho_r = g \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{30 (\hbar c)^3}$$

där $g = 2$ för fotoner (spin åt två riktningar). Med olika sorters neutrinos fås $g \approx 3.4$.

Vi får

$$c^2 \frac{d}{dt} (\rho_r(t) a^3(t)) = -\rho_r(t) c^2 \frac{1}{3} \frac{d}{dt} a^3(t) \quad (8.12)$$

som har lösningen

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0) \frac{a^4(t_0)}{a^4(t)}. \quad (8.13)$$

För både materia och strålning avtar energidensiteten då $a(t)$ ökar. Det kanske inte känns så konstigt om man jämför med en vanlig gas. Att det blir lite olika i de båda fallen beror på att materia inte bidrar med något tryck, vi har ju förutsatt att galaxerna bara finns som ett moln av damm i universum.

Vakuuum

För vakuuum gäller¹⁶

$$\rho_v(t) = Z \quad (8.14)$$

där Z har enheten kg/m^3 för att det skall passa ihop med övriga densiteter.

Detta ser kanske konstigt ut, och begreppet vakuuumenergi (även kallad mörk energi) är omtvistat. Men om universum utvidgas så blir det helt enkelt mer vakuuum.

Einstein själv införde en kosmologisk konstant Λ i sin fältekvation för att hålla ihop universum. Han trodde nämligen inte att universum kunde expandera eller kontrahera. Att införa denna konstant sa han själv var ett av hans livs största misstag.

Detta var alltså det första steget enligt listan ovan. Steg två innebär att (8.1) skall sättas in i (A.12), sen detta i (A.10) och (A.11) och till sist detta i (A.9). Detta steg utelämnas.

Innan vi går vidare kan vi redan nu räkna ut något intressant.

Exempel 8.5.1. Bakgrundsstrålningen har en temperatur som går att mäta upp. Sambandet mellan temperatur och energidensitet är ett resultat från kvantmekaniken och motiveras inte här, men det gäller att

$$\rho_r = g \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{30 (\hbar c)^3 c^2}, \quad (8.15)$$

där $g = 2$ för fotoner. Man har mätt upp temperaturen för bakgrundsstrålningen till $T_0 = 2.726$ K vilket ger

$$\rho_r(t_0) = 4.2 \cdot 10^{-14} \text{ J/m}^3 = 4.6 \cdot 10^{-31} \text{ kg/m}^3. \quad (8.16)$$

¹⁶Namnet Z är inte vedertaget. Jag har valt ett namn på denna konstant som skiljer sig från alla namn jag sett eftersom jag är noga med enheterna. Historiskt införde Einstein en konstant Λ i sin ekvation på ett sådant sätt att det inte syns att det är frågan om en densitet. I SI-enheter gäller $\rho_v = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} \text{ kg/m}^3$

Energidensiteten för materia är svårare att mäta upp. En typisk galax har 10^{11} stjärnor med totalt $10^{12} M_{\odot}$. Det finns ca 10^{11} galaxer i det synliga universum. Om man utgår ifrån att det synliga universum har en radie på $45 \cdot 10^9$ ljusår¹⁷ fås

$$\rho_m(t_0) = 5.9 \cdot 10^{-28} \text{ kg/m}^3. \quad (8.17)$$

Nu kan vi räkna ut när $\rho_m(t) = \rho_r(t)$. Vi får

$$\rho_m(t_0) \frac{a^3(t_0)}{a^3(t)} = \rho_r(t_0) \frac{a^4(t_0)}{a^4(t)} \quad (8.18)$$

$$5.9 \cdot 10^{-28} a(t) = 4.6 \cdot 10^{-31} a(t_0) \quad (8.19)$$

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \frac{4.6 \cdot 10^{-31}}{5.9 \cdot 10^{-28}} \approx 10^{-3} \quad (8.20)$$

Vi ser alltså att universum var ca 1000 ggr mindre när materia började dominera över strålning. Ur detta kan vi också räkna ut vilken temperatur universum hade då. Vi får

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0) \frac{a^4(t_0)}{a^4(t)} \quad (8.21)$$

$$g \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{30 (\hbar c)^3} = g \frac{\pi^2 (k_B T_0)^4}{30 (\hbar c)^3} (10^3)^4 \quad (8.22)$$

$$T^4 = T_0^4 (10^3)^4 \quad (8.23)$$

$$T = T_0 \cdot 10^3 \quad (8.24)$$

Universum var alltså 1000 ggr varmare när detta inträffade. Den energi som som detta motsvarar är

$$E = k_B T = k_B T_0 \cdot 10^3 \approx 0.23 \text{ eV}$$

vilket lite mindre än energin för synligt ljus, per foton. Detta betyder att värme-strålningen inuti universum då inte var synligt ljus och den kunde inte heller vara inblandad i processer som skapade eller krävde synligt ljus. Univiersum blev alltså genomskeinligt ungefär vid denna tid.

Brytpunkten mellan när universum dominerades av strålning respektive materia inträffar alltså ungefär samtidigt som universum blev genomskeinligt, 378 000 år efter Big Bang. ▲

8.6 Steg 2, 3 och 4 – Mot en differentialekvation

Steg två är den metrik vi redan behandlat i avsnitt 8.1.

Det tredje steget har vi inte tagit upp så mycket om. I Schwarzschildmetriken skulle T_{ab} vara noll eftersom all materia i universum var samlad i en enda punkt i origo. Här blir det lite mer komplicerat så vi utelämnar detta steg.

Steg fyra: Det som blir kvar blir differentialekvationen

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 = -kc^2 \quad (8.25)$$

¹⁷På den tid som gått sedan Big Bang, $13.8 \cdot 10^9$ år, har universum utvidgats så att radien nu är $45 \cdot 10^9$ ljusår.

som kallas *Friedmanns ekvation*.

Observera att denna är ännu svårare att lösa än den ser ut att vara eftersom ρ också beror på t .

Förutom vissa specialfall som vi kommer till i steg 6, måste vi förlita oss på numeriska beräkningar för att angripa denna.

8.7 Steg 5 – Vårt universum

För olika energifördelningar får man olika form på universum (sluten, platt eller öppen) och olika lösningar $a(t)$. För att förenkla uttrycken brukar man resonera som följer.

För någon energidensitet, som brukar kallas den *kritiska* Energidensiteten ρ_c , blir universum platt. Det betyder att $k = 0$. Då kan (8.25) skrivas

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} c^2 \rho_c.$$

Vänsterledet går att uttrycka som H_0^2 enligt (8.5). Då fås

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (8.26)$$

Nu är det brukligt att beskriva hur mycket av de olika energiformerna som universum består av relaterat till denna energidensitet. Vi får

$$\Omega_r = \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_c}$$

och på samma sätt med Ω_m och Ω_v .

Bäst överensstämmelse med observationer fås med $H_0 = 72$ km/s/Mpc, $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_v = 0.7$ och $\Omega_r = 0.0008$.

Detta resulterar i ett platt universum, och en lösning $a(t)$ som ser ut som grafen på sida 31.

8.8 Steg 6 – En beräkning

Eftersom universum är platt kan vi utan dåligt samvete sätta $k = 0$ i (8.25).

Om vi också begränsar oss till det tidiga universum som dominerades av strålning, kan vi sätta

$$\rho(t) = \rho_r(t) = \rho_r(t_0) \frac{a^4(t_0)}{a^4(t)}.$$

Om vi sätter in detta i (8.25) fås

$$\frac{da}{dt} = \frac{\alpha}{a}$$

där α är en sammanslagning av alla konstanter. Vi ser att detta är en separabel differentialekvation som löses enligt

$$\begin{aligned} a da &= \alpha dt \\ a^2 &= \alpha t + C \\ a &= \sqrt{\alpha t + C}. \end{aligned}$$

Vi vill att $a(0) = 0$ skall gälla, så $C = 0$. Nu vet vi alltså att

$$a(t) = \sqrt{\alpha t}$$

för detta specialfall!

Denna lösning kan användas på ett klurigt sätt. Det gäller att

$$a'(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{t}}.$$

Detta och uttrycket för $a(t)$ kan vi sätta in i (8.25). Vi får

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{2t} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \rho. \quad (8.27)$$

Nu kan vi räkna ut hur gammalt universum var då protoner och neutroner började bilda tyngre ämnen. Bindningsenergin per nukleon för de minsta kärnorna är ungefär 2 MeV. Energidensiteten för strålning med denna medelenergi blir (8.15) och $k_B T = E$

$$\rho = 3.730231242877326 \cdot 10^{26} \text{ J/m}^3. \quad (8.28)$$

Om vi sätter in detta i (8.27) får vi

$$t = 0.33 \text{ s}. \quad (8.29)$$

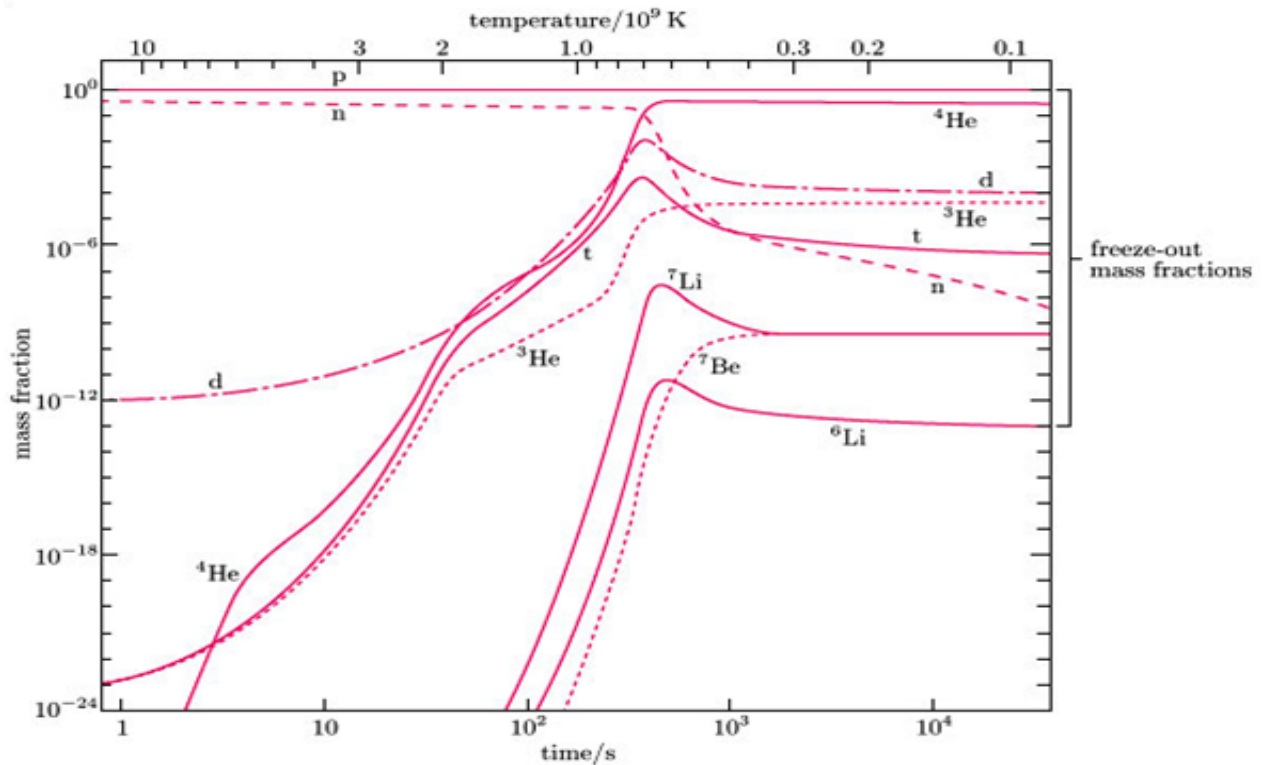
När universum var ca 0.33 s kunde alltså de lättaste atomkärnorna bildas.

Med mer detaljerade modeller kan man räkna ut precis hur mycket av olika atomkärnor som bildades innan universum blev så kallt att fusion inte kunde ske. Det krävs en mycket komplicerad modell för detta, eftersom vad som kan bildas beror av vad som finns samt trycket och temperaturen i universum.

I fusionsprocesserna frigörs energi, som påverkar universums expansion. Det blir alltså ett kopplat system av halter för olika sorters atomkärnor och $a(t)$. Dessutom skall $a(t)$ uppfylla Friedmanns ekvation under processens gång.

I grafen nedan visas resultatet av en sådan beräkning. Notera de logaritmiska skalorna. Symbolerna p,n,d och t står för protoner (vilket skall tolkas som väte), neutroner, deuterium och tritium. Notera att ämnenas fördelning är relativt massan för protonerna.

Efter ungefär 5000 s är universum så kallt att fusion inte längre pågår i någon större utsträckning. Man benämner detta *Freeze-out*. Universum består då av ca 75% väte, 25% helium och väldigt lite (men mätbart) litium och beryllium. Fria neutroner och tritium-kärnor är inte stabila, så de fortsätter dock att falla sönder med halveringstider på 881.5 s respektive 12.32 år.



Undersöker man spektrumet för de tidigaste stjärnorna, som är bildade från denna urgas, ser man att detta stämmer väl. Stjärnor som innehåller tyngre ämnen (till exempel vår sol och framförallt de inre planeterna) måste alltså ha bildats av supernova-rester från dessa stjärnor, för i supernovor bildas tunga ämnen.

8.9 Steg 7 – Storleken av vårt synliga universum

Eftersom universum bara är 13.8 Går¹⁸ gammalt kan vi bara ta del av information som hunnit hit under så lång tid. Eftersom universum inte blev genomskinligt förrän efter 378 000 år kan vi dock inte se längre tillbaka än till denna "vägg".

Ljus som är ca 13.4 Går gammalt når alltså hit nu. Men under tiden har universum expanderat, så om vi kunde frysa universums expansion och skicka tillbaka en ljustråle till denna vägg måste det ljuset färdas under en längre tid. Det betyder också att avståndet dit är mer än 13.4 Gly¹⁹. Däremot har koordinatavståndet till väggen inte ändrats. Ekvationerna (8.2) och (8.3) ger oss att avståndet är²⁰

$$d(t_0) = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{c dt}{a(t)}$$

där t_0 är den nuvarande tidpunkten om $t = 0$ är Big Bang (vi får leva med den lite knasiga konventionen att t_0 är "nu").

För att kunna beräkna denna integral måste vi känna till $a(t)$ för vårt universum. Vi måste alltså lösa (8.25) (repeteras nedan)

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = -kc^2$$

¹⁸Observera att G är prefixet giga. 1 Går är alltså en miljard år.

¹⁹1 Gly är 1 miljard ljusår.

²⁰Observera att d står för *distance*, det är inte en diameter.

där vi har från (8.11), (8.13) och (8.14)

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_v \\ &= \rho_m(t_0) \frac{a^3(t_0)}{a^3(t)} + \rho_r(t_0) \frac{a^4(t_0)}{a^4(t)} + Z.\end{aligned}$$

Om vi relaterar respektive energidensitet till den kritiska, som vi införde i avsnitt 8.7, får vi

$$\rho(t) = \rho_c \left(\Omega_m \frac{a^3(t_0)}{a^3(t)} + \Omega_r \frac{a^4(t_0)}{a^4(t)} + \Omega_v \right).$$

Nu förenklar vi notationen ytterligare genom att införa $a_0 \equiv a(t_0)$. Sätter vi in detta i Friedmanns ekvation och använder (8.26) får vi

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 - H_0^2 \left(\Omega_m \frac{a_0^3}{a} + \Omega_r \frac{a_0^4}{a^2} + \Omega_v a^2 \right) = -kc^2. \quad (8.30)$$

Nu står vi inför några problem. Vi kan inte mäta vad a_0 har för värde i vårt universum, och vi vet inte värdet på k .

För att lösa detta gör vi två omskalningar av $a(t)$ och t genom

$$\tilde{t} = H_0 t \quad (8.31)$$

$$\tilde{a}(t) = a(t)/a_0. \quad (8.32)$$

Detta gör dels att både tidskoordinaten \tilde{t} och \tilde{a} blir dimensionslösa, dels att $\tilde{a}_0 = 1$. Kedjeregeln ger

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{da}{d\tilde{t}} H_0 = \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} H_0 a_0. \quad (8.33)$$

Definitionen av Hubbles konstant (8.5) ger då att

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = 1$$

då $t = t_0$.

Sätter vi in (8.32) och (8.33) i (8.30) får vi

$$H_0^2 a_0^2 \left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} \right)^2 - H_0^2 \left(\Omega_m \frac{a_0^2}{\tilde{a}} + \Omega_r \frac{a_0^2}{\tilde{a}^2} + \Omega_v a_0^2 \tilde{a}^2 \right) = -kc^2.$$

Om vi delar båda led med $H_0^2 a_0^2$ och inför en ny konstant

$$\Omega_c = -\frac{kc^2}{H_0^2 a_0^2} \quad (8.34)$$

får vi

$$\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} \right)^2 - \left(\frac{\Omega_m}{\tilde{a}} + \frac{\Omega_r}{\tilde{a}^2} + \Omega_v \tilde{a}^2 \right) = \Omega_c. \quad (8.35)$$

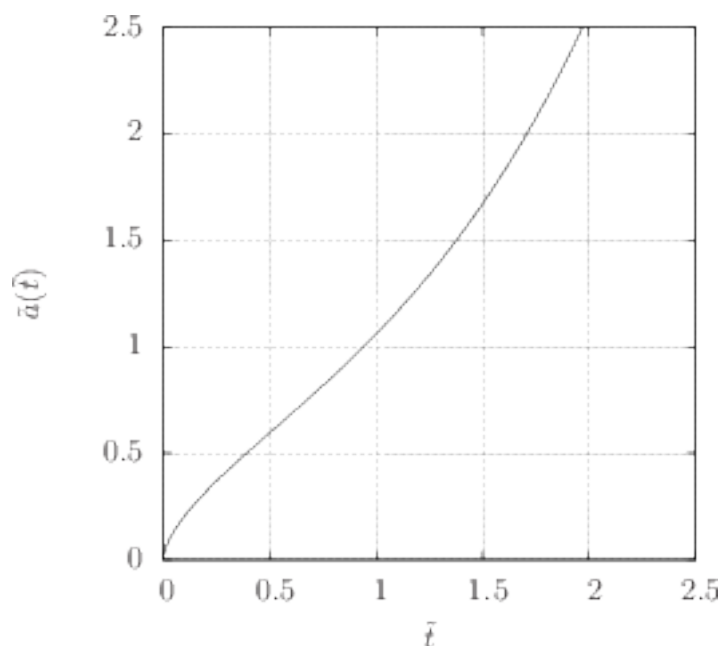
De fyra parametrarna Ω beskriver helt universum enligt denna modell. Om vi sätter $t = t_0$ får vi

$$\Omega_r + \Omega_v + \Omega_m + \Omega_c = 1,$$

Syftet med alla dessa variabelbyten är att vi fått en differentialekvation som kan lösas numeriskt, och en metod att tolka lösningen. Vi går tillväga enligt följande steg.

1. Bestäm värden på Ω_r , Ω_v och Ω_m . Om de väljs med astronomiska observationer som utgångspunkt får vi en modell för vårt universum, men man kan också välja dem fritt för att se hur ett universum med detta val skulle utvecklas. Kom ihåg att dessa parametrar står för *procentsatser* av den energidensitet som gör universum platt.
2. Beräkna Ω_c ur dessa. Observera att Ω_c är noll för ett platt universum och negativt för ett slutet.
3. Lös (8.35). I de flesta val av energidensiteter måste detta göras numeriskt. Ur lösningen bestäms den nuvarande tidpunkten \tilde{t}_0 från $\tilde{a}(\tilde{t}) = 1$. I själva verket gör man detta i omvänd ordning: Sätt $\tilde{a} = 1$ och stega *bakåt* i tiden till dess $\tilde{a} = 0$.
4. Bestäm ett värde på H_0 , antingen från experiment eller ett fiktivt val, och beräkna t_0 ur $t_0 = \tilde{t}_0/H_0$. Detta är universums ålder.
5. Genom (8.34) kan vi beräkna a_0 om vi behöver veta det. Om Ω_c är positivt kan vi bortse från minustecknet²¹.

Med $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_v = 0.7$, $\Omega_r = 0.0008$ och $H_0 = 72$ km/s/MPc fås lösningen i grafen nedan.



Vi noterar att $\tilde{a}(\tilde{t}) = 1$ ger $\tilde{t}_0 = 0.94$. Detta ger att universums ålder är $t_0 = 12.77$ Går och att $a_0 = 1.436 \cdot 10^{28}$. Eftersom $\Omega_c = -0.0008$ är universum nästan platt,

²¹Så får fysiker göra ibland!

och vi kan knappast lita på värdet på a_0 eftersom en mycket liten skillnad i Ω_c ger en stor förändring av a_0 .

Det är svårt att relatera till att universum skulle ha utvidgat sig med en faktor 10^{28} sedan Big Bang, eftersom dess "storlek" var noll då ($a(0) = 0$). Vi måste också komma ihåg att den modell vi använder här för universums utveckling inte gäller vid Big Bang. Vi har ingen kvantmekanisk teori för gravitation, vilket krävs för att beskriva universum vid Big Bang.

Det visar sig att vi inte behöver veta a_0 för att beräkna avståndet till gränsen för det synliga universum. Vi började med

$$d(t_0) = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{c dt}{a(t)},$$

vilket med de variabelbyten vi gjort, (8.31), (8.32) och (8.33), blir

$$d(t_0) = \frac{c}{H_0} \int_0^1 \frac{d\tilde{t}}{\tilde{a}(\tilde{t})}.$$

Vi behöver alltså inte veta a_0 ! Numeriskt blir integralen 2.8639369772451975, vilket ger att det sökta avståndet fås till 38.9 Gly.

8.10 Övningar

1. Lös (8.10).
2. Verifiera att (8.13) är en lösning till (8.12).
3. Verifiera att enheten för högerledet i (8.15) är kg/m^3 .
4. Verifiera att värden som ges i (8.16) och (8.17) stämmer med vad som anges i texten.
5. Verifiera att alla termier i (8.25) har samma enhet.
6. Lös (8.25) i fallen där ett platt universum endast består av materia respektive vakuum. Jämför med kurvan på sida 31.
7. Varför sammanfaller kurvorna för ${}^7\text{Li}$ och ${}^7\text{Be}$ efter ca 10^3 s i grafen på s 41?
8. Verifiera att värdet som ges i (8.28) stämmer med vad som anges i texten.
9. Lös (8.27) för att verifiera att värdet som ges i (8.29) stämmer.

Facit

1. Lösningen är (8.11).
2. -
3. -
4. -
5. Enheten är $\frac{1}{\text{s}^2}$ för alla termer. Det syns lättast i första termen eftersom $a(t)$ saknar enhet.

6. Differentialekvationen blir separabel. Lösningen är

$$a(t) = \left(\frac{2k}{3}t\right)^{2/3}$$

där $k = \frac{8\pi G\rho_m(t_0)a^3(t_0)}{3}$ i fallet med endast massa och

$$a(t) = Ce^{kt}$$

där $k = \frac{8\pi GZ}{3}$ i fallet med endast vakuum. Observera att det inte blir något Big Bang med endast vakuum i universumet. Observera också att dessa lösningar stämmer med kurvan på sida 31. För små t stämmer en kurva av typen $a(t) = kt^m$ för något $0 < m < 1$, medan den exponentiella tillväxten stämmer för stora t .

7. ${}^7\text{Li}$ sönderfaller till ${}^7\text{Be}$ med betasönderfall.

8. -

9. -

A Lite om tensorer

Denna text är tänkt att kunna läsas med olika grad av förkunskaper i och intresse för matematik. Den intresserade kan i detta kapitel läsa lite om några matematiska begrepp som gör att man trots allt får en större behållning av teorin.

A.1 Enkla exempel

GR är en teori som är formulerad med *tensorer*. En tensor är en sorts utvidgning av vektorbegreppet som det kan vara bra att känna till lite om. Vår utgångspunkt får bli en vektorer och matriser.

A.1.1 Vektorer och linjära funktioner

Den enklaste matrismultiplikationen är den mellan en radvektor \mathbf{u} och en kolumnvektor \mathbf{v} .

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = u_x v_x + u_y v_y.$$

Detta påminner uppenbart om skalärprodukten mellan två **kolumn**vektorer. Det blir mer om denna likhet senare. I texter som handlar om linjär algebra kan olika författare ha olika språkbruk rörande rad- och kolumnvektorer. I vissa framställningar görs det inte så stor skillnad på dem, men nu är det viktigt att göra det.

Det vi kallar vektor är en **kolumn**vektor.

Om vi har en radvektor, kan vi tänka på den som en funktion som "vill ha" en kolumnvektor för att kunna göra ett tal. Alla linjära funktioner går att skriva som radvektorer, så vi övergår till att säga linjär funktion istället för radvektor.

Vi kan också tänka på en kolumnvektor som något som "vill ha" en linjär funktion för att kunna göra ett tal.

Exempel A.1.1. Låt $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. En linjär funktion $f(\mathbf{v})$ kan vara $[-2 \ 7]$ så att

$$f(\mathbf{v}) = [-2 \ 7] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = -2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 22.$$

Här passar det att använda det vanliga sättet att skriva upp detta som en matrismultiplikation. Det blir mer om notationen nedan men per definition gäller i alla fall att

$$f(\mathbf{v}) = f_x v_x + f_y v_y.$$

Vi kan också tänka på denna sammansättning av f och \mathbf{v} som

$$\mathbf{v}(f) = v_x f_x + v_y f_y.$$

Här passar inte den vanliga notationen eftersom

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} [-2 \ 7] \neq [-2 \ 7] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Däremot gäller

$$f_x v_x + f_y v_y = v_x f_x + v_y f_y$$

eftersom komponenterna är vanliga tal.

Därför fås

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(f) = 22.$$

▲

A.1.2 Matriser

Då en matris verkar på en vektor fås en ny vektor. Denna kan man sen sätta in i en linjär funktion. Funktionen kan man som sagt tänka på som en radvektor.

Exempelvis skulle vi kunna ha

$$f(A\mathbf{v}) = [2 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [2 \ 3] \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix} = -21.$$

Man kan också tänka på detta som att det är matrisen som ”vill ha” både en linjär funktion och en vektor för att göra ett tal. Då skulle vi skriva

$$A(f, \mathbf{v})$$

vilket också skulle ge talet -21 . Man skulle dock inte kunna skriva detta som en vanlig matrismultiplikation på ett naturligt sätt.

Notationen detta avsnitt, och avsnitten innan, är vald så att den liknar den vanliga notationen i ”normal” linjär algebra. I teori som rör tensorer är det vanligt att ange tensorer med fet stil, och linjära funktioner med grekiska bokstäver i fet stil. Exemplet ovan skulle då kunna skrivas

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = [2 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = [2 \ 3] \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix} = -21.$$

A.1.3 Tensorer

Tensorer är ett slags samlingsnamn för vektorer, linjära funktioner och kombinationer av dessa. Tensorer vill göra tal, och för att de skall kunna göra det måste man förse dem med rätt antal vektorer och linjära funktioner. En tensor är av *ordning*, eller *typ* (k, l) om den vill ha k linjära funktioner och l vektorer för att den skall kunna göra ett tal. I någon mening kan man också tänka på ordningen så att tensorn "är" k vektorer och l linjära funktioner på samma gång.

Med detta språkbruk blir alltså en vektor en tensor av ordning $(1, 0)$ eftersom den måste förse med en linjär funktion för att man skall få ett tal av den.

En linjär funktion är en tensor av ordning $(0, 1)$ eftersom man måste ge den en vektor för att man skall få ett tal.

Om man vill kan man tänka på matriser som ett sätt att skriva upp en tensor av ordning $(1, 1)$ eftersom den alltså måste få både en radvektor och en kolumnvektor för att det skall bli ett tal.

Ett vanligt tal, en skalär, är en tensor av ordning $(0, 0)$. Den är ju redan ett tal, så den måste inte ges varken en vektor eller linjär funktion för att bli ett tal.

Schematiskt kan man alltså tänka på tensors typ som

$$\begin{aligned}(k, l) &= (\text{vill ha } k \text{ funktioner, vill ha } l \text{ vektorer}) \\ &= (\text{är } k \text{ vektorer, är } l \text{ funktioner}).\end{aligned}$$

A.1.4 Tensorer av ordningarna $(2, 0)$ och $(0, 2)$

Tensorer av andra ordningar än just dessa fyra specialfall som nämnts ovan går alltså inte att skriva upp på matrisform om man vill bevara det normala sättet att tänka på matrismultiplikation.

Ibland ser man författare skriva tensorer av ordning $(2, 0)$ och $(0, 2)$ som matriser, men då mest för att uttrycka komponenterna, inte för att uttrycka beräkningar.

Vill man räkna med tensorer av ordningarna $(2, 0)$ och $(0, 2)$ måste vi införa en ny notation som visar att vi ger tensorn två funktioner respektive två vektorer.

Tensorn $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ är²² en tensor av ordning $(0, 2)$ och vill alltså ha två vektorer som argument. Om vi **definierar** notationen

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}_2^0 \mathbf{v}$$

där vi explicit angivit att komponenterna inom hakparenteserna är komponenter för en tensor av ordning $(0, 2)$ genom att skriva talen 0 och 2 på det sätt som vi gjort.

En viktig del i sammanhanget är att man inte på ett trivialt sätt kan identifiera en linjär funktion med en vektor genom att bara transponera den.

Symbolen \mathbf{u}^T står alltså inte för en linjär funktion. Syftet med att skriva på detta sätt är **bara** för att bevara den normala matris-algebra.

På samma sätt, för en tensor $\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega})$ ordning $(2, 0)$, **definierar** vi notationen

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega}) \equiv \boldsymbol{\sigma} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}_0^2 \boldsymbol{\omega}^T.$$

²²Det ser man på argumenten, då de är angivna med latinska bokstäver.

Observera att σ och ω alltså är linjära funktioner, som representeras av radvektorer. Transponatet av en radvektor är en kolumnvektor, så notationen går ihop sig.

Med denna notation skulle en tensor av ordning $(1, 1)$ skrivas

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}_1^1$$

men detta är en vanlig matris, så vi skriver inte ut 1:orna fortsättningsvis.

A.2 Allmänt om tensorer

Om V är ett vektorrum är V^* rummet av alla linjära funktioner definierade på V . Detta rum benämns *dualrummet* till V . Man benämner ofta medlemmar i V^* *dualvektorer*. Kom dock ihåg att de motsvarar linjära funktioner.

Medlemmar i V betecknas som vanligt med fet stil och latinska gemener, exempelvis \mathbf{v} , och som nämnts ovan är det alltså vanligt att man betecknar medlemmar i dualrummet med fet stil och grekiska bokstäver, exempelvis ω . Tensorer av högre ordning betecknas med latinska versaler, exempelvis \mathbf{A} .

En tensor är alltså en funktion som tar ett antal vektorer och ett antal linjära funktioner och gör ett tal av detta. Vi kan skriva $\mathbf{T}(\omega, \nu, \mathbf{v})$ för en tensor av typ $(2, 1)$. Ordningen är viktig, $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \omega, \nu)$ skulle vara en annan tensor.

Inför vi en uppsättning basvektorer i V , $\hat{\mathbf{e}}_0, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{(N-1)}$, respektive i V^* , $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^0, \dots, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(N-1)}$ kan vi beskriva vektorer och dualvektorer med komponenter i dessa baser enligt

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{a=0}^{N-1} v^a \hat{\mathbf{e}}_a \\ \omega &= \sum_{a=0}^{N-1} \omega_a \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^a. \end{aligned}$$

För att visa att en komponent avser en basvektor i vektorrummet eller dualrummet sätter man indexet uppe (vektorer) eller nere (dualvektorer).

Observera att även basvektorerna är vektorer och "bas-dualvektorerna" är dualvektorer. När en basvektor "sätts in i" en bas-dualvektor (eller med ett annat språkbruk, då bas-dualvektorns värde beräknas i basvektorn) fås ett tal. Det är väldigt praktiskt att välja baserna så att

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^k(\hat{\mathbf{e}}_l) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

men det är inte nödvändigt rent tekniskt. Vi utgår fortsättningsvis från att detta val är gjort om inget annat sägs.

Med denna index-notation skulle vår tensor $\mathbf{T}(\omega, \nu, \mathbf{v})$ skrivas $T_{ab}{}^c$ på komponentform.

Att skriva en tensor på formen $\mathbf{T}(\omega, \nu, \mathbf{v})$ benämns *abstrakt* form. Det är viktigt att inse att \mathbf{T} så att säga finns "på riktigt" och att komponenterna $T_{ab}{}^c$ blir olika för olika val av baser.

Det är alltså ovanligt att man ger basvektorer namn som $\hat{\mathbf{x}}$ och $\hat{\mathbf{y}}$, men det förekommer. Då får komponenterna på ett naturligt sätt namnen v_x och v_y . I exempel A.1.1 var detta underförstått.

Har man flera dimensioner är detta opraktiskt. Då är det bättre att numrera basvektorerna så att man kan bilda en summa över komponenterna.

I relativitetsteorin är det normalt att man börjar numrera från noll, så i två dimensioner skulle komponenterna vara v_0 och v_1 . Nollkomponenten är normalt tidskomponenten av vektorn i rumtiden.

På komponentform gäller alltså

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) &= \boldsymbol{\omega}\left(\sum_{a=0}^{N-1} v^a \hat{\mathbf{e}}_a\right) \\ &= \sum_{b=0}^{N-1} \omega_b \hat{\boldsymbol{\omega}}^b \left(\sum_{a=0}^{N-1} v^a \hat{\mathbf{e}}_a\right) \\ &= \sum_{b=0}^{N-1} \omega_b \sum_{a=0}^{N-1} v^a \hat{\boldsymbol{\omega}}^b(\hat{\mathbf{e}}_a) \\ &= \sum_{a=0}^{N-1} \omega_a v^a\end{aligned}$$

där N är dimensionen på vektorrummet (och på dualrummet). I det sista steget har (A.1) använts.

När man beräknar värden av tensorer, dvs sätter in vektorer och funktioner i den, blir det alltså ruskigt många summor över vektorernas och funktionernas komponenter. Därför inför vi nu en viktig konvention.

Om samma index förekommer både som ett övre och ett undre index är det underförstått att man skall summera över detta.

Denna konvention infördes av Einstein och han ansåg själv att det var hans främsta och enda bidrag till matematiken.

Det betyder alltså att $\omega_a v^a$ är en förkortning för $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v})$, men också för $\mathbf{v}(\boldsymbol{\omega})$ vilket också exemplifierades i avsnitt A.1.1. Det gäller alltså att $\omega_a v^a = v^a \omega_a$.

Om man däremot **inte** har samma index på de två tensorerna, som i $\omega_a v^b$, skall man inte summera över indexen.

Resultatet av denna sammansättning blir inte ett tal, utan en ny tensor, i detta fall av ordning (1, 1) eftersom sammansättningen är gjord av en vektor och en funktion. Det är meningsfullt att ge detta ett nytt namn

$$B_a{}^b = \omega_a v^b.$$

Man kan i viss mån även tänka på denna sorts sammansättning som en slags multiplikation, som formellt heter *tensorprodukt* eller *yttre produkt*. Kruxet är att den inte är kommutativ eftersom ordningsföljden av de vektorer och linjära funktioner man ”ger” tensorn spelar roll. Det gäller att

$$B_a{}^b = v^b \omega_a.$$

Ordningsföljden och typen för argumenten till en tensor är alltså viktig. Tensorn $\mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v})$ skulle på komponentform skrivas $T_{ab}{}^c$ medan $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})$ skulle skrivas $T_{bc}{}^a$.

Det är alltså viktigt att hålla ordning på vilka index som är uppe och nere. Vilken symbol (bokstav) som används för att varje index är däremot oviktigt eftersom de bara står för talen $0, 1, \dots, N - 1$ där N är dimensionen på vektorrummet (och dualrummet).

Det gäller alltså att $X_{a\ c}^b = X_{q\ k}^j$ eftersom det här visas att $\mathbf{X}(\cdot, \cdot, \cdot)$ är en tensor vars första och tredje argument är linjära funktioner och andra argument är en vektor.

Att bara veta att en tensor är av typ $(1, 2)$ ger alltså ingen information om på vilka platser man skall stoppa in de två vektorerna respektive dualvektorn.

Anger man siffror som index menar man enskilda komponenter, som är tal. Om tensorn $\mathbf{Y}(\cdot, \cdot)$ är av ordning $(0, 2)$ finns exempelvis komponenten Y_{01} . Denna komponent fås för övrigt om man stoppar in \hat{e}_0 och \hat{e}_1 i \mathbf{Y} , dvs $Y_{01} = \mathbf{Y}(\hat{e}_0, \hat{e}_1)$. Detta motsvarar i någon mening att

$$v_x = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{x}} \rangle$$

med den normala notationen för vektorer i den linjära algebran.

I samma uttryck kan det vara flera index som det skall summeras över. Sådana index tar så att säga ut varandra och kommer inte att finnas i den tensor som blir resultatet. Exempelvis kommer vi se uttryck som

$$\omega_a = F_{cad}^b \alpha_b u^c v^d. \quad (\text{A.2})$$

I detta exempel skall det alltså summeras över indexen b, c och d .

Eftersom komponenterna bara är tal spelar det rent tekniskt ingen roll i vilken ordning de skrivs. Exempelvis gäller för $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}, \cdot, \mathbf{v})$ på komponentform att

$$F_{cad}^b \alpha_b u^c v^d = \alpha_b F_{cad}^b v^d u^c.$$

Det framgår av indexen vilken ordning som vektorerna och dualvektorerna sätts in.

Däremot finns det en pedagogisk fördel i att skriva ordningsföljden så att uttryck liknar vanlig matris-algebra. Det blir mer om det senare.

Observera att platsbytet på indexen c och d ger olikheten

$$F_{cad}^b \alpha_b u^c v^d \neq F_{cad}^b \alpha_b u^d v^c.$$

Det motsvarar på abstrakt form

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}, \cdot, \mathbf{v}) \neq \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v}, \cdot, \mathbf{u}).$$

Eftersom all nödvändig information finns i komponentformen, är det inte så vanligt att den abstrakta formen används. Vissa författare utelämnar den helt och låter uttryck som T_a^{bc} stå för själva tensorn.

Detta är en mycket kraftfull notation, som på engelska kallas *abstract index notation*, som kommer användas allt mer frekvent fortsättningsvis i denna text. Det finns dock pedagogiska poänger med den abstrakta notationen eftersom det är viktigt att skilja på själva tensorn och dess komponenter i en viss bas.

A.3 Basbyten

I vanliga vektorrum kan man byta bas. Det som ”utför” detta är en basbytesmatris. Då en tensor ”är” flera vektorer på samma gång måste man hålla reda på vilken av vektorerna som basbytet avser. I praktiken vilket index.

En tensor kan även "vara" linjära funktioner, dvs dualvektorer. Även i dualrummet (som också är ett vektorrum!) kan man byta bas.

Vi skall nu se hur allt detta går till och hur det skrivs.

Observera att en Lorentztransformation är ett basbyte! Det som beskrivs här är alltså något som används ofta. Kom också ihåg att Lorentztransformationerna är ortogonala transformationer som bevarar avstånd m m.

Eftersom vi har så många vektorrum och dualrum att byta från och till, kan vi inte ge alla basvektorer i respektive rum nya namn. Det visar sig oerhört praktiskt att istället ange den bas vi byter till med ett prim, men att sättat detta på komponenten istället för på basvektorn.

I vektorrummet byter vi till $\hat{e}_{0'}, \dots, \hat{e}_{(N-1)'}$ och i dualrummet till basen $\hat{e}^{0'}, \dots, \hat{e}^{(N-1)'}$.

En vektor \boldsymbol{v} respektive dualvektor $\boldsymbol{\omega}$ blir i de båda baserna

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= v^a \hat{e}_a = v^{b'} \hat{e}_{b'} \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_a \hat{e}^a = \omega_{b'} \hat{e}^{b'}\end{aligned}$$

där prim-tecknet alltså sitter på på indexet för att ange att komponenten är en komponent i den nya basen, dvs prim-basen.

En "basbytesmatris" som tar en vektor i en bas och ger samma vektor i en annan bas måste då få ett vektorindex i den nya basen (för det är ju det resultatet skall bli) och ett dualvektorindex i den gamla basen (för det ju en vektor som skall ges till "matrisen"). En "basbytesmatris" är alltså en tensor av ordning $(1, 1)$. Eftersom det är *samma* vektor som uttrycks i två olika baser ges inte vektorn något nytt namn. Ett uttryck som utför detta är

$$v^{b'} = A^{b'}_a v^a.$$

Inversen till $A^{b'}_a$ är den matris som byter tillbaka till den ursprungliga basen. På komponentform fås

$$v^c = A^c_{d'} v^{d'}.$$

Sammanställningen av att byta och sen byta tillbaka måste bli enhetsmatrisen. Byter vi från originalbasen till den nya basen och tillbaka fås på komponentform

$$A^c_{d'} A^{d'}_a = \delta^c_a \tag{A.3}$$

där δ^c_a är enhetsmatrisen

$$\delta^c_a = \begin{cases} 1 & a = c \\ 0 & a \neq c \end{cases}$$

Observera att även enhetsmatrisen är en tensor av ordning $(1, 1)$.

Byter vi från den nya basen till den ursprungliga och tillbaka fås

$$A^{b'}_a A^a_{c'} = \delta^{b'}_{c'}.$$

Om vi bara byter mellan baser i samma vektorrum (vilket resonemanget ovan gäller) är det ingen skillnad på δ^c_a och $\delta^{b'}_{c'}$, men om vi skulle ha att göra med avbildningar mellan **olika** vektorrum måste man hålla reda på vilket av de båda rummens enhetslement som avses, så det är bra att ta för vana att vara noga med vilken bas indexen gäller även i enhetsmatrisen.

För dualvektorer fås också en basbytesmatris i detta vektorrum. På komponentform fås

$$\omega_{b'} = \omega_a A^a_{b'}$$

respektive

$$\omega_c = \omega_{d'} A^{d'}_c.$$

Om vi detaljstuderar hur indexen sitter på dessa matriser och hur de används syns en detalj som både är praktiskt användbar och som kan ge viss djupare insikt. Matrisen $A^{a'}_b$ används både då vi skriver en **vektor** i den **nya basen**, och då vi skriver en **dualvektor** i den **gamla basen**.

Detta är ingen slump. Jämför med **aktiva** och **passiva** transformationer. Vi får samma resultat om vi aktivt byter vektor och stoppar den i en oförändrad funktion, som vi får om vi inte förändrar vektorn men stoppar den i en funktion vi ”förändrat åt andra hållet”.

Då värdet $\omega(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(\omega)$ beräknas fås

$$\omega_{c'} v^{c'} = \omega_d A^{d'}_{c'} A^c_e v^e = \omega_d v^d$$

där (A.3) har använts i sista steget.

En tensor av ordning $(1, 1)$ (och högre ordningar) måste transformeras i vardera komponent. Det blir en transformationsmatris för varje index enligt

$$T^{a'}_{b'} = A^{a'}_c T^c_d A^d_{b'}.$$

Exemplet med basbytet visar ytterligare en finess med tensorer. Bara för att man har en tensor av ordning (k, l) måste man inte ge den ”allt den vill ha” för att göra ett tal.

Om man bara ger den *en* vektor minskar dess behov av vektorer med ett. Kvar blir då en tensor av ordning $(k, l - 1)$.

Tensorn $A^{b'}_a$ är en tensor av ordning $(1, 1)$, och ”den blev” en tensor av ordning $(1, 0)$ (förvisso i en annan bas) då vi ”gav den” v^a .

Detta exemplifierades också i (A.2) ovan då F^b_{cad} blev en dualvektor ω_a då vi ”gav den” $\alpha_b u^c v^d$.

A.4 Exempel på viktiga tensorer av ordning $(0, 2)$

Det finns några exempel där just tensorer av ordning $(0, 2)$ dyker upp i fysiken. Syftet med detta avsnitt är inte att fördjupa förståelsen för dessa. Vi begränsar oss till att poängtera det tankesätt kring dessa tensorer som motiverar att de är viktiga.

Exempel A.4.1. Laddad partikel

Då en laddad partikel med laddning q påverkas av både ett elektriskt och ett magnetiskt fält påverkas den av en kraft. Kraften beror på partikelns hastighet $\mathbf{v} \equiv v^a$.

I relativitetsteorin klumpar man ihop det elektriska fältet och det magnetiska fältet till ett tensorfält av ordning $(0, 2)$ som benämns Faradaytensorn, \mathbb{F}_{ab} . Den anges ofta i ett avvikande typsnitt för att inte förväxlas med en kraft F^a . Vi får en linjär funktion kvar om vi ger den en vektor (hastigheten) $q \mathbb{F}_{ab} v^a$. Tolkningen av denna linjära funktion är att den berättar hur stor kraften är åt ett visst håll.

Blir då inte det kraften själv? Nej, detta är ett nytt tankesätt som du måste vänja dig vid. För att få reda på kraftens storlek åt ett visst håll, måste du berätta åt vilket håll du menar. Du får ett tal om du berättar åt vilket håll $\mathbf{u} \equiv u^a$ du vill veta kraften, eller snarare får du då veta hur stor komponent kraften har åt det hållet. Tolkningen av $q \mathbb{F}_{ab} v^a u^b$ är "kraften åt hållet²³ b på partikeln som följd av rörelsen åt hållet a ".

Notera att $\mathbb{F}_{ab} v^a u^b \in \mathbb{R}$.

Komponenterna för \mathbb{F}_{ab} är

$$\mathbb{F}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Med "vanliga" rumsvektorer gäller

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} + q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

där \mathbf{F} är kraften som verkar på en partikel med laddningen q och hastighet \mathbf{v} då den befinner sig i ett elektriskt fält \mathbf{E} och ett magnetiskt fält \mathbf{B} .

Motsvarande uttryck med tensorer är

$$F^a = q \mathbb{F}^a_b v^b$$

där F^a är den fyrkraft som verkar på partikeln och v^b är partikelns fyrhastighet.

Komponenterna för \mathbb{F}^a_b är

$$\mathbb{F}^a_b = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Hur denna tensor bildas från \mathbb{F}_{ab} förklaras i avsnitt A.6. ▲

Exempel A.4.2. Spänningar och töjningar i ett material

Då ett material påverkas av en kraft $\mathbf{F} \equiv F^a$ förlängs det i allmänhet åt det hållet kraften verkar. Det blir också smalare åt alla andra håll.

Vill man veta hur stor förändringen är måste man ha klart för sig vilken riktning $\mathbf{u} \equiv u^a$ man vill veta förändringen.

Denna situation kan beskrivas med en tensor A_{ab} . Tolkning av $A_{ab} F^a u^b$ blir "hur förändras kroppen åt hållet b som en följd av kraften åt hållet a ". ▲

Exempel A.4.3. Rörelsemängdsmoment

Då en kropp inte roterar runt en principalaxel blir rotationen ett vobblande där rotationsaxeln preciserar runt det håll rörelsemängdsmomentet är riktat.

Rörelsemängdsmomentets komponent åt hållet u^a som en följd av en rotation runt en axel med riktning ω^b beskrivs av en tensor I_{ab} . Storleken av detta är $I_{ab} u^a \omega^b$. ▲

²³Möjliga andra formuleringar är "b-komponenten av kraften" eller "kraften i riktning b ". Välj den du är bekväm med.

Exempel A.4.4. Riccitenorn för rummets krökning

En lite förenklad beskrivning av att en yta (eller punktmängd i högre dimensioner) är krökt, är att en förflyttning åt ett håll generellt sett förorsakar en förflyttning åt ett annat håll.

Det framgår av figuren på sida 16. Följer man en geodet som passerar ett område där ytans krökning är stor, finner man att geodeten böjer av från vad som är en rät linje i koordinatsystemet.

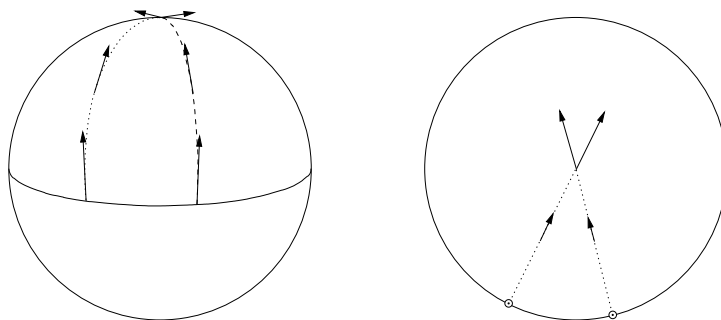
Detta kan beskrivas av en tensor R_{ab} som tolkas som ”förändring av banan i riktning b som följd av en förflyttning i riktning a ”. För att få ett tal av detta måste man ge tensorn en vektor v^a som beskriver den riktning man går, och en vektor u^b som anger åt vilket håll man söker förändringens storlek, som då ges av $R_{ab} v^a u^b$.

Denna beskrivning av krökning är i högsta grad väldigt handviftande, men den motiverar i någon mening ändå att det är tensorer av ordning $(0,2)$ som dyker upp i exempelvis fältekvationerna för GR i avsnitt A.7. Den tensor som beskrivs här är tänkt att vara A.10. ▲

A.5 Metriken som ett tensorfält av ordning $(0,2)$

En skalärprodukt förväntas ge ett tal av två vektorer, därför kan den betraktas som en tensor av ordning $(0,2)$.

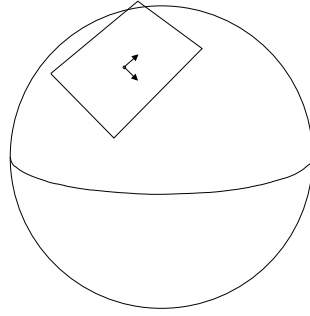
Krökta punktmängder²⁴ är inte vektorrum, bland annat eftersom en parallellförflyttning innebär en vridning. Figuren nedan visar två vektorer som är parallella vid ekvatorn. När de förflyttas ”rakt fram” och möts vid nordpolen pekar de åt olika håll. Med ”rakt fram” i sammanhang som dessa menas att vektorn själv hela tiden är tangent till kurvan som den förflyttas utmed. Bilden till höger visar situationen sedd mot nordpolen.



En punkt i ett krökt rum går alltså inte att betrakta som en vektor. Detta skiljer SR från GR. Vi kan då inte heller bilda skalärprodukten ”mellan två punkter”. Däremot kan vi tänka oss att det i varje punkt finns ett lokalt vektorrum.

Det brukar kallas *tangentrum* och går att visualisera enligt figuren nedan.

²⁴Här avses egentligen något som kallas *mångfalder*. Vad som menas med detta är, lite handviftande, punktmängder som sitter ihop på ett ”mjukt” sätt utan hörn, hål och kanter. Exempelvis ett klot, ytan $z = f(x, y)$ i exempel 4.1.1, eller motsvarande i högre dimensioner.



Tangentrummet är ett vektorrum. En liten förflyttning \mathbf{ds} i vår punktmängd går att tänka på som en vektor i tangentrummet, och längden av denna går att definiera med en tensor av ordning (0,2) som då får tjäna som metrik. Vi får

$$(ds)^2 \equiv \mathbf{g}(\mathbf{ds}, \mathbf{ds}) \equiv \|\mathbf{ds}\|^2$$

där tensorn \mathbf{g} alltså är vår metrik-tensor. På komponentform får vi

$$(ds)^2 = g_{ab} ds^a ds^b.$$

Observera den kanske lite olyckliga notationen där ds är längden av \mathbf{ds} , medan ds^a är \mathbf{ds} på komponentform. För att inte förväxla längden av \mathbf{ds} i kvadrat, dvs $(ds)^2$, med den andra komponenten av \mathbf{ds} , dvs ds^2 , skrivs den förra inom parentes.

Förståelsen av normen g_{ab} motiverar definitionen av en skalärprodukt i tangentrummet. Om \mathbf{u} och \mathbf{v} är vektorer i tangentrummet (som går att tänka på som tangenter till kurvor i punktmängden åt respektive håll) får vi

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \equiv \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv g_{ab} u^a v^b.$$

Axiomatiskt är alltså tensorfältet g_{ab} en skalärprodukt som ger en norm som ger en metrik. Att vi tagit det i omvänd ordning är för att det är av pedagogiska skäl. I funktionsrum motiveras skalärprodukten från normen på samma sätt.

Metriken är generellt koordinatberoende, tensorn g_{ab} har olika komponenter i olika punkter i punktmängden. Vi har alltså ett tensorfält på punktmängden. Jämför med ett vektorfält, exempelvis ett elektriskt fält, där man har en vektor i varje punkt.

I kapitel 4 visas att det är naturligt med en koordinatberoende metrik. Speciellt avsnitt 4.2 handlade om detta.

Eftersom skalärprodukten per definition skall vara symmetrisk gäller

$$g_{ab} = g_{ba}.$$

Det kan vara bra att nyttja denna symmetri för att snygga till uttryck för att få dem mer lika uttryck med radvektorer, kolumnvektorer och matriser.

A.6 Höja och sänka index

Metriken kan användas för att omvandla en vektor till en dualvektor och tvärt om.

Då man bara ger metriken *en* vektor får man kvar något som "vill ha" en vektor till, dvs en linjär funktion. Index-notationen uttrycker detta mycket smidigt enligt

$$v_b = g_{ab} v^a.$$

Metriken är på detta sätt en avbildning från vektorrummet V till dess dualrum V^* . Denna avbildning har en invers som avbildar åt andra hållet på samma sätt. Den avbildningen blir en tensor av ordning $(2, 0)$. Vi får

$$u^b = u_a g^{ab}$$

där $(g_{ab})^{-1} \equiv g^{ab}$.

På samma sätt kan metriken användas för att höja eller sänka index på tensorer av högre ordning. Exempelvis gäller

$$\mathbb{F}^a_b = \mathbb{F}_{cb} g^{ac}.$$

Observera att (A.4) är bildat med metriken som gäller i SR, dvs

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_2^0$$

Vill man ändra på flera index går det också bra enligt exemplet

$$T^{ab}_c{}^d = g^{ae} g^{bf} g_{cg} T_{ef}{}^{gd}.$$

Nu ska vi se vad som händer om man höjer ett index på metriken själv. Vi får

$$g^{ab} g_{bc} = g^a_c \tag{A.5}$$

$$g_{ab} g^{bc} = g_a^c. \tag{A.6}$$

Tolkningen av dessa uttryck är lite speciell eftersom tensorer av ordningarna $(2, 0)$ och $(0, 2)$ är två vektorer respektive två linjära funktioner samtidigt. Generellt betyder

$$T_{ab} A^{bc}$$

Att den ”andra linjära funktionens” värde skall beräknas i den ”första vektorn i A^{bc} . Det ser man genom att studera indexen. Man får generellt olika resultat om man stoppar in den första eller andra vektorn i den första eller andra (som nedan) funktionen. Det gäller att

$$T_{ab} A^{bc} \neq T_{ab} A^{cb}.$$

Likhet råder om tensorn är symmetrisk, i exemplet om $A^{ab} = A^{ba}$. Generellt sett gör det skillnad vilket index man höjer eller sänker. Det gäller att

$$T^a_b = g^{ac} T_{cb} \neq T_{ac} g^{cb} = T_a^b.$$

För symmetriska tensorer, och då alltså för metriken, råder dock likhet. Detta gör att vi kan (och har gjort i alla uttryck ovan) vända på indexen i metriken så att uttrycken liknar vanlig matrismultiplikation med där ett kolumnindex kommer före det radindex det skall summeras över. Jämför med det enklaste fallet

$$u^a = A^a_b v^b$$

som helt går att identifiera med multiplikation mellan en matris och en vektor.

Vår notation tillåter att vi skriver

$$u^a = v^b A^a_b$$

men det är inte lika pedagogiskt.

Vi ska nu tillämpa att metriken är symmetrisk och skriva om (A.5) och (A.6) enligt

$$g^a_c = g^{ab} g_{bc} = g_{bc} g^{ab} = g_{cb} g^{ba} = g_a^c.$$

Eftersom metriken är symmetrisk är alltså uttrycken lika, men observera att det bara är uttrycket längst till vänster som går att tolka som en matris.

Denna matris måste vara enhetsmatrisen eftersom g^{ab} och g_{ab} är varandras inverser. Det gäller alltså att

$$g^a_c = g_a^c = \delta^a_c = \delta_a^c \quad (\text{A.7})$$

Metriken blir alltså med nödvändighet enhetsmatrisen om den uttrycks som en vanlig matris. Det förklarar behovet av att införa notationen för tensorer av ordning $(2, 0)$ och $(0, 2)$ som infördes i avsnitt A.1.4.

Observera att g^{ab} är en skalärprodukt i dualrummet, $g^{ac} \equiv \mathbf{g}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma})$.

$$\begin{aligned} g_{ab} u^a v^b &= g_{ab} u_c g^{ca} v_d g^{db} \\ &= u_c v_d g^{ca} g_{ab} g^{bd} \\ &= u_c v_d g^{cd} \end{aligned}$$

där vi har metriken symmetri och (A.7) i sista steget.

Denna likhet säger att man får samma värde på skalärprodukten i vektorrummet mellan två vektorer, som man får av skalärprodukten i dualrummet mellan vektorernas motsvarighet som dualvektorer.

A.7 Einsteins fältekvationer

Universums (rumtidens) form bestäms av dess metrik. Einsteins fältekvationer relaterar rumtidens metrik till fördelningen av massa och energi i det enligt

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \quad (\text{A.8})$$

där G_{ab} är Einsteintensorn där rumtidens metrik ingår, G är gravitationskonstanten (som används i Newtons gravitationslag), T_{ab} är energy momentum-tensorn²⁵ där fördelningen av massa och energi ingår.

Metriken ingår i G_{ab} enligt följande samband.

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \quad (\text{A.9})$$

$$R_{ab} = \frac{\partial \Gamma^c_{ab}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^c_{ac}}{\partial x^b} + \Gamma^d_{ab} \Gamma^c_{dc} - \Gamma^d_{ac} \Gamma^c_{bd} \quad (\text{A.10})$$

$$R = g^{ab} \left(\frac{\partial \Gamma^c_{ab}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^c_{ac}}{\partial x^b} + \Gamma^d_{ab} \Gamma^c_{cd} - \Gamma^d_{ac} \Gamma^c_{bd} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} \right) \quad (\text{A.12})$$

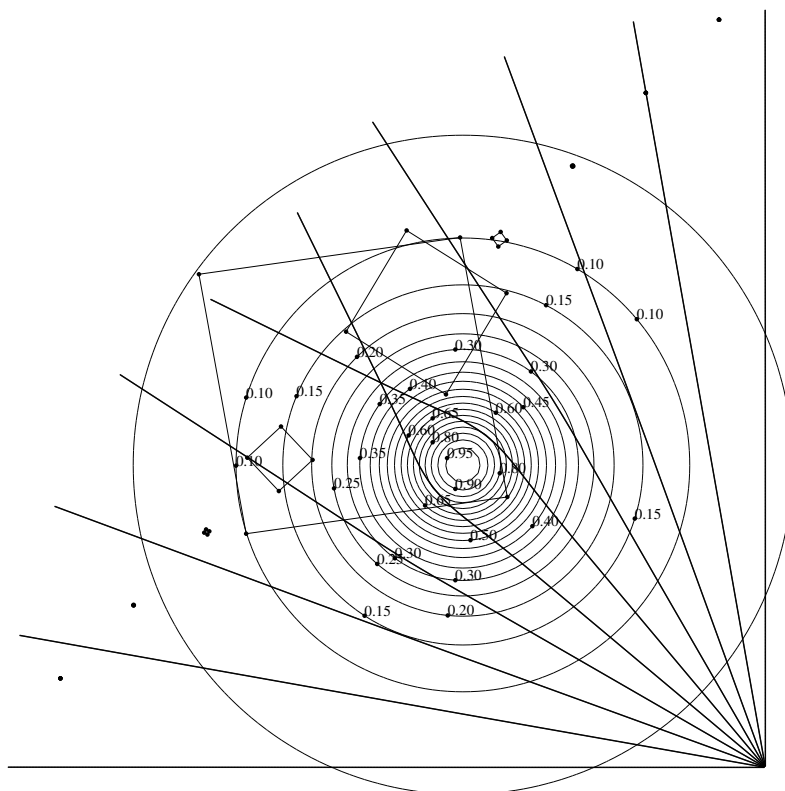
²⁵Jag känner inte till något bra namn på svenska för detta tensorfält.

Energy momentum-tensorn är inte så komplicerad. Den beskriver hur mycket energi och massa som finns i varje punkt, men även hur det strömmar. Det kan också vara frågan om energi i form av elektriska och magnetiska fält, samt mörk energi²⁶ och mörk materia.

Om det bara finns elektriska och magnetiska fält i universum är T_{ab} helt enkelt (!) Faradaytensorn som nämndes i exempel A.4.1.

Riccitensorn R_{ab} går att illustrera. Den beskriver hur mycket "extra" punkter som uppstår på grund av en punktmängds krökning. Jämför med då du skulle tillverka en krökt yta, till exempel genom att virka. För att få ytan att krökas måste du virka fler maskor "på samma ställe" eller minska antalet maskor. Om vi betraktar R_{ab} som en matris kan vi beräkna egenvektorer och egenvärden till den. Tensorfältet kan då illustreras med romber där hörnen pekar åt egenvektorernas riktningar och rombans diagonal låter vi vara egenvärdet.

Figuren nedan visar detta för en rad punkter på vår yta från tidigare exempel.



Av symmetriskäl pekar alla romber in mot kullens topp respektive längs höjdkurvor-na i detta exempel. Det blir störst romb där ytans krökning är störst. Nära toppen på kullen skulle romben bli mycket stor. I denna skala skulle den uppta hela bilden, vilket inte är illustrativt nog för att ritas ut.

Den andra termen i Einsteintensorn (A.9) skalar bara om rombernas storlek. Detta exempel visar hur höger och vänster led i Einsteins fältekvationer hänger ihop: Mycket energi eller massa – stor krökning.

²⁶Även kallad vakuumentergi.

Att lösa (A.8) är dock mycket svårt om inga antaganden görs om symmetrier etc. Det är ganska bökigt även i de två enkla fallen som beskrivs i denna text (all massa i centrum, respektive universum som en homogen gas av galaxer).

A.8 Vad är Γ_{bc}^a och vad används den till?

När man undersöker hur en vektor förändras under en liten förflyttning måste man ta hänsyn till att rummet är krökt. Derivatn åt ett visst håll (den partiella derivatan) måste korrigeras!

$$\nabla_a v^b = \frac{\partial v^b}{\partial x^a} + \Gamma_{ac}^b v^c$$

Tolkningen av detta följer av följande resonemang. Vi har en vektor \mathbf{v} . Hur förändras den under en liten förflyttning?

Vänsterledet är ”hur mycket ändras b -komponenten av \mathbf{v} under en liten förflyttning åt a -hållet?”

Högerledet är svaret: Jo, den normala förändringen + en transformation av \mathbf{v} som beror på rummets krökning. Den transformationen är en matris som verkar på \mathbf{v} . Låt den matrisen vara A . Vi får $A\mathbf{v}$ som på komponentform blir $A^b_c v^c$.

Men det blir en sådan matris för varje håll man deriverar åt. Kalla dessa matriser A_a , eller på komponentform $(A_a)^b_c$. Indexet a är alltså egentligen inte ett vanligt tensor-index, utan bara en bokföring av vilken matris som avses.

Till sist benämner vi $(A_a)^b_c$ som Γ_{ac}^b istället. OBS! Γ_{ac}^b är inte en tensor!

Av lite djupare matematiska anledningar som inte förstås genom denna enkla bild gäller en symmetri i de nedre indexen,

$$\Gamma_{ac}^b = \Gamma_{ca}^b.$$

Detta förenklar användandet av uttrycket eftersom man inte måste komma ihåg vilket index som kommer först.

A.9 Gradient och riktningsderivata

Med *gradienten* av en funktion menas den vektor som pekar åt det håll ett skalärfält²⁷ växer. Som en tensor-maskin måste man betrakta gradienten av en tensor av ordning (m, n) som en tensor av ordning $(m, n + 1)$.

Anledningen till detta är att om man vill veta hur mycket en tensor förändras *åt ett visst håll*, måste man förutom den ursprungliga tensorn ge en extra vektor som pekar ut det håll vi är intresserade av.

Mer formellt ger man den vektorn som argument till den nya tensorn. Om \mathbf{v} är en vektor och f ett skalärfält, fås alltså uttrycket

$$\nabla_a f v^a$$

för hur mycket f växer åt riktningen \mathbf{v} . Själva ”gradienten av f ” är alltså tensorn $\nabla_a f$ som är en tensor av typ $(0, 1)$. På samma sätt fås

$$\nabla_a V^b v^a$$

²⁷När man håller på med vanliga funktioner säger man ofta ”åt det håll en funktion växer”. Notera dock att en vanlig funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är ett skalärfält, ett tensorfält av ordning $(0, 0)$ om man så vill.

som uttryck för hur en vektor V^b växer åt riktningen v^a . Förändringen av en vektor är en vektor, så det är naturligt att $\nabla_a v^b$ är en tensor av ordning $(1, 1)$. Ger man den en vektor har man en tensor av ordning $(1, 0)$ kvar, vilket är en vektor.

A.10 Parallelltransport och geodeter

Ett viktigt fenomen som måste utredas är parallelltransport av en vektor. Med detta menas att vektorn inte skall förändras då den förflyttas längs en kurva. Om $x^a(t)$ är en kurva är dess tangent $\frac{dx^a}{dt}$.

Om V^a är vektorn som inte skall förändras längs $x^a(t)$ måste

$$\nabla_a V^b \frac{dx^a}{dt} = 0$$

gälla.

Med ord betyder det ”förändringen av V^b i riktningen $\frac{dx^a}{dt}$ skall vara noll”.

Med uttrycket för ∇_a fås

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V^b}{\partial x^a} + \Gamma_{ac}^b V^c \right) \frac{dx^a}{dt} &= 0 \\ \frac{\partial V^b}{\partial x^a} \frac{dx^a}{dt} + \Gamma_{ac}^b V^c \frac{dx^a}{dt} &= 0 \\ \frac{dV^b}{dt} + \Gamma_{ac}^b V^c \frac{dx^a}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Det sista uttrycket är en differentialekvation vars lösning är $V^b(t)$.

Begreppet *geodet* förklaras i 4.4. Matematiskt är en geodet en kurva som har egenskapen att dess tangent inte förändras då man följer kurvan. Med $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, eller på komponentform $V^a = \frac{dx^a}{dt}$, i uttrycket ovan fås

$$\frac{d^2 x^b}{dt^2} + \Gamma_{ac}^b \frac{dx^c}{dt} \frac{dx^a}{dt} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Denna ekvation brukar kallas *geodetiska ekvationen*²⁸.

Vill man veta var man hamnar om man ”går rakt fram” från en viss punkt i en viss riktning i en given metrik måste man beräkna Γ_{ac}^b och lösa (A.13). Den är tyvärr ett antal (lika med dimensionen på punktmängden i fråga) kopplade partiella differentialekvationer, så det är inte så lätt att göra generellt.

De obekanta konstanter som dyker upp vid lösningen bestäms ur utgångspunktens koordinater och utgångsriktningen.

För det exempel som gås igenom i kapitel 4 finns en Maxima-fil där det konstrueras en numerisk lösning till (A.13). (Egentligen konstrueras ett algebraiskt uttryck som sedan används i ett Pythonprogram.)

A.11 Acceleration och fyrkrafter

Uttrycket (A.13) påminner om andraderivatn av en kurva, vilket i sin tur leder in oss på något som liknar Newtons andra lag. Om en fyrkraft F^b verkar på en kropp

²⁸Tror jag i alla fall. På engelska benämns den *geodesic equation*.

ändras dess kurva i rumtiden enligt

$$\frac{d^2 x^b}{d\tau^2} + \Gamma_{ac}^b \frac{dx^c}{d\tau} \frac{dx^a}{d\tau} = \frac{F^b}{m}. \quad (\text{A.14})$$

Observera att vi måste parametrisera kurvan med kroppens egentid för att detta skall gälla.

Om kraften kommer från ett elektromagnetiskt (tensor-)fält²⁹ som ges av Faraday-tensorn F_d^b ³⁰ beror fyrkraften på partikelns fyrhastighet. Högerledet blir då

$$\frac{q}{m} F_d^b \frac{dx^d}{d\tau}.$$

Att lösa (A.14) är lika knepigt som att lösa (A.13). Numeriska lösningar kan fås på samma sätt som i ovan nämnda Maxima-fil.

En intressant detalj med (A.14) är att den i princip strider mot förutsättningarna i GR. Det är meningen att rumtidens metrik skall formas av fördelningen av massa och energi, men sen färdas alla partiklar längs geodeter enligt (A.13).

Yttre krafter ”finns” så att säga inte. De fall där de kan tänkas dyka upp är situationer där man har en krökt rumtid som formas av något mycket stort, till exempel en stjärna, men att det dessutom finns ett elektromagnetiskt (tensor-)fält som inte är så kraftfullt att det nämnvärt påverkar rumtidens form, men att det ändå påverkar rörelsen hos en liten laddad partikel (som inte heller den påverkar rumtidens form).

A.12 Hur bestäms Γ_{bc}^a ?

Hittills har vi bara använt $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} \right)$ men utan att motivera var det kommer ifrån.

Då en vektor parallellförflyttas borde inte längden av vektorn ändras. Inte heller vinkeln mellan två vektorer bör ändras under parallellförflyttningar. Kom ihåg att metriken g_{ab} även definierar en skalärprodukt. Vi vill helt enkelt att $\nabla_c g_{ab} = 0$ skall gälla. Ur detta kan vi algebraiskt lösa ut Γ_{bc}^a .

²⁹I GR, liksom i SR, finns inte ett elektriskt fält och ett magnetiskt fält. De är sammanslagna till ett tensorfält som ges av Faradaytensorn.

³⁰Observera den lite olyckliga notationen där både fyrkraften och Faradaytensorn båda betecknas med F . Då tensorerna har olika ordning borde ingen förvirring uppstå i praktiken.